S. 1142. A.

MEMORIE

DI MATEMATICA

E DI FISICA

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA

DELLE SCIENZE

TOMO XIV PARTE I

CONTENENTE LE MEMORIE DI MATEMATICA.

VERONA

DALLA TIPOGRAFIA GAMBARETTI E COMPAGNO

MDCCCIX

NATURAL HISTORY

INDICE

DELLE COSE CONTENUTE IN QUESTA PRIMA PARTE.

Statuto della Società *Pag.* v
Catálogo de' Socj xii
Elogio del fu Sig. Ab. *Fortis* scritto dal Sig. Cav. Ab. CARLO AMORETTI xvii
Annali della Società, continuati da OTTAVIO CAGNOLI Pro-Segretario della medesima (1)

Dell'annua parallasse di *α* della Capra, Memoria del Sig. Ab. VINCENZO CHIMINELLO *pag.* 1
Sopra sei archi-baleni contemporanei e concentrici, Memoria del MEDESIMO 4
Della vera curva degli archi del Ponte a S. Trinita di Firenze, Discorso geometrico-storico del Sig. PIETRO FERRONI 8
Lettera al Sig. Cav. *Antonio Cagnoli* Presidente della Società Italiana delle Scienze del Sig. Cav. Ab. ANGELO CESARIS, sopra la Rifrazione Lunare 48
Esposizione del vero principio dimostrativo dell'equilibrio del Sig. Cav. ERMENEGILDO PINI C. R. 56
Dell'anomalo freddo dell'inverno passato e delle sue cause, Memoria del Sig. Ab. VINCENZO CHIMINELLO 79
Teoria dell'azione capillare del Sig. *De la Place* ridotta alla più semplice ed elementare geometria dal Sig. GIOVACCHINO PESSUTI 87
Saggi intorno alla teoria del moto concreto de' corpi, del Sig. PAOLO DELANGES 148
Pendolo idrometrico composto, Memoria del Sig. GIUSEPPE VENTUROLI 158
Della risoluzione de' Problemi di massimo o minimo, quando la quantità, che vuolsi massima o minima, è data, Memoria del Sig. Cav. SEBASTIANO CANTERZANI 167

Sopra le soluzioni particolari delle equazioni alle differenze, Memoria del Sig. Cav. VINCENZO BRUNACCI *Pag.* 175
Opposizioni di Saturno osservate dal Sig. Ab. VINCENZO CHIMINELLO 197
Occultazione di Giove osservata dal MEDESIMO 199
Sul paragone del calcolo delle funzioni derivate coi metodi anteriori, Memoria del Sig. Cav. Ab. TOMMASO VALPERGA CALUSO 201
Sulle oscillazioni di un Corpo pendente da un filo estendibile, Memoria del Sig. PIETRO PAOLI 225
Notizie astronomiche di Germania comunicate all'Italia dal Sig. Cav. ANTONIO CAGNOLI 234

STATUTO

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE.

1809.

I. La Società Italiana delle Scienze è composta di quaranta Socj attuali, tutti Italiani, di merito maturo, e per Opere date in luce ed applaudite riconosciuto.

II. La scienza della natura è il grande oggetto, che la Società medesima si propone. Pubblicherà pertanto, sotto il titolo di Memorie di Matematica e di Fisica, le produzioni di chiunque de' Socj vorrà render pubblico negli Atti Sociali il frutto de' proprj studj.

III. De' quaranta Membri, uno sarà Presidente della Società, e la presidenza durerà sei anni.

IV. Avrà la Società un Segretario, ed un Vicesegretario amministratore. Il primo sarà partecipe di tutte le facoltà dei Quaranta, benchè non fosse uno d'essi, ed avrà diritto, non obbligo, di presentar Memorie da inserirsi negli Atti. Il secondo terrà il maneggio economico.

V. §. 1. Altra Classe vi avrà di Socj Emeriti in numero indeterminato. Essa è preparata a chiunque dei Quaranta, o per età avanzata, o per abituale mancanza di salute, o per altro motivo, non producesse verun suo lavoro in quattro consecutivi tomi delle Memorie sociali.

§. 2. Ma se un Socio attuale passasse negli Emeriti dopo aver posto otto Memorie ne' tomi sociali, in tal caso seguiterà a godere, quantunque Emerito, tutte le prerogative di Attuale.

§. 3. Che se un Socio Emerito ponga Memorie in tre tomi consecutivi, sarà restituito nel ruolo degli Attuali.

VI. Un'altra Classe, parimente indeterminata, comprenderà i Socj Onorarj. A questa saranno ascritti, previo l'assenso di ventuno almeno dei Quaranta, i Compilatori, eletti dal Presidente, degli elogj de' Socj attuali defunti. Inoltre, esso Presidente potrà aggregare a questa classe, nel suo sessenio, due

Soggetti, non più, che avessero operato cosa a pro della Società, onde meritassero d'esserne onorati particolarmente.

VII. Ed altra Classe avrà finalmente il titolo di Socj stranieri, stabilita per distinguere ed onorare il merito nelle Scienze in qualunque parte fuori d'Italia. Sarà composta di dodici Soggetti, a ciascun de' quali verrà esibito in dono un esemplare d'ogni Volume, che uscirà in luce, delle Memorie Sociali.

VIII. Le aggregazioni alle classi de' Socj attuali e degli stranieri si faranno nel modo seguente. Per ogni posto che rimanga vacante, dovrà il Presidente, col mezzo del Segretario, proporre sei nomi a ciascuno de' Socj attuali, il qual farà scelta d'uno, e lo indicherà per lettera al Segretario. Quel de' sei, che, entro il termine di due mesi dalla proposta, avrà più suffragi, s'intenderà aggregato, e la Compagnia sarà fatta opportunamente consapevole dell'acquistato Cooperatore.

IX. All'elezione del Presidente saranno invitati li Socj attuali con una lettera circolare del Segretario, al quale ognuno di essi farà tenere in iscritto la nomina del Socio da sè eletto a Presidente: e la pluralità de' voti, che arriveranno al Segretario, dentro il termine di due mesi dopo la data del circolare invito, determinerà l'elezione, che dovrà esser dal Segretario annunziata ai Membri votanti.

X. Ciascheduno dei Quaranta ha facoltà d'inserire negli Atti una scoperta utile, un'importante produzione, anche di Persona non aggregata, ma Italiana, purchè se ne faccia mallevadore egli stesso, come di cosa propria, inverso la Compagnia.

XI. Di questi Autori non Socj dovrà il Presidente aggiungere i nomi, segnati con asterisco, ai sei che presenta, a tenor dell'articolo VIII, per l'elezione d'un Socio attuale. Bensì questa nomina cesserà, dopo fatta sei volte, contate dalla pubblicazione d'ogni Memoria.

XII. Le Dissertazioni o Memorie da pubblicarsi ne' Volumi della Società, debbon essere scritte in lingua Italiana e in carattere chiaro. Il Segretario dovrà apporvi la data del recapito, acciocchè sieno stampate con essa in fronte e per ordine di tempo. Che se l'opera sia voluminosa, può l'Autore distribuirla in due o più parti pe' tomi susseguenti.

XIII. Tutto ciò che è destinato pegli Atti dev'esser nuovo, inedito, importante, ed analogo all'indole scientifica di

questi Volumi, che non ammette sfoggio d'erudizione, nè moltitudine di note e di citazioni.

XIV. I fogli stampati di ciascun Volume non dovranno eccedere il numero di cento. Le Memorie soprabbondanti resteranno in deposito pel tomo susseguente, o saranno restituite agli Autori che le dimandassero. Bensì, nel caso di soprabbondanza, le Dissertazioni degli Autori non Socj dovranno cedere il luogo a quelle de' Socj.

XV. La Società non si fa risponsabile delle Opere pubblicate negli Atti. Ogni Autore dev'esser mallevadore delle cose proprie, come se le pubblicasse appartatamente.

XVI. Non permette peraltro la Società le invettive personali, e nè anche le critiche non misurate: sopra di che veglierà il Segretario, e ne farà inteso il Presidente per un acconcio provvedimento.

XVII. Il Socio attuale, Autore d'una Memoria o d'un Elogio, avrà in dono cinquanta esemplari della sua produzione, con frontispizio apposito, e con la numerazion delle pagine ed il registro ricominciati. Ad ogni altro Autore saranno corrisposte dodici copie. Qualunque Autore ne desiderasse di più, non sarà aggravato d'alcuna spesa per conto della composizion tipografica.

XVIII. Nell'atto di queste spedizioni sarà trasmessa ai Socj, che avranno mandato il voto per le elezioni, la dimostrazione stampata del numero de' suffragj toccati ad ogni Candidato, senza il nome però de' votanti, e così ancora i conti stampati dell'amministrazione tenuta dal Vicesegretario amministratore.

XIX. Alle principali Accademie estere sarà offerto in dono un esemplare d'ogni Volume delle Memorie sociali, che andrà successivamente uscendo alla luce.

XX. I doveri del Presidente, oltre i già mentovati, sono: mantener l'osservanza dello Statuto; eleggere il Segretario ed il Vicesegretario, qualunque volta sia di bisogno; avere in governo e cura ogn'interesse della Società; rivedere, almeno una volta all'anno, i conti dell'amministrazione del Vicesegretario, alla validità de' quali fa d'uopo l'approvazione e sottoscrizione di mano propria del Presidente: e ragguagliar finalmente il Successore dello stato degli affari nell'atto di rinunziargli l'Uffizio.

XXI. Dopo il Presidente, il Segretario è la Persona propriamente deputata a mantener corrispondenza con tutti i Membri della Società, e quasi centro, ove debbono metter capo tutte le relazioni Sociali. Egli invia le patenti d'aggregazione; presiede alla stampa, ai Correttori di quella, ed all'incision delle tavole; prende cura delle spedizioni, e d'ogni altro interesse della Società, sempre però con l'approvazione del Presidente. Egli deve pure tener registro d'ogni atto che importi; custodire i voti de' Socj per le elezioni, manifestandoli al Presidente ad ogni richiesta; e finalmente eseguir tutto ciò, che ne' precedenti articoli gli è addossato.

XXII. §. 1. Ad esempio delle principali Accademie, la Società Italiana delle Scienze avrà Membri pensionarj: e la pensione sarà d'annui zecchini ventiquattro, pagabili per metà allo spirare d'ogni semestre; non computate in verun caso, sia di morte, o di rinunzia, o di transito negli Emeriti, le frazioni di semestre.

§. 2. Saranno capaci della pensione li tre più anziani, e di permanenza non interrotta, nel ruolo de' Socj attuali; sin a tanto però che rimangano nel ruolo medesimo.

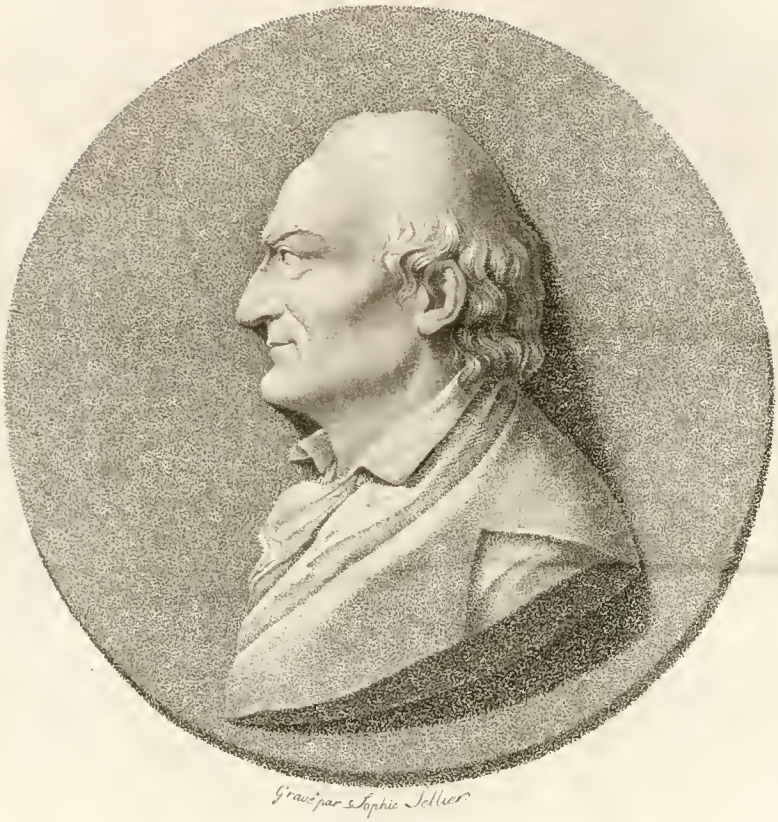
§. 3. Qualunque volta l'eguaglianza d'età accademica renda ambigua la scelta d'uno o più Pensionarj, sarà tolta l'ambiguità concedendo la preferenza alla maggior età naturale. Nel qual caso, il Segretario chiederà a ciascun de' coetanei come sopra, documento legale dell'epoca di sua nascita; e chi non lo faccia a lui pervenire entro mesi tre dopo la domanda, s'intenderà che rinunzj alla pensione.

§. 4. Due Socj (sia ciascun d'essi attuale o emerito) potranno inoltre goder la pensione, loro vita naturale durante, quando siano autori ciascuno di dieci o più Memorie stampate ne' Tomi Sociali, il valor delle quali venga giudicato degno di tal premio dalla pluralità assoluta de' Socj attuali, a proposizione del Presidente; ovvero dalla pluralità relativa, quando si tratti di giudicare del merito relativo fra più Candidati.

§. 5. In ambi questi partiti le opinioni de' Socj resteranno sempre segrete, ed a sola notizia del Presidente e del Segretario: si pubblicherà unicamente il numero de' suffragj a favore di ciascun Candidato, siccome è prescritto per le elezioni nell'articolo XVIII.

§. 6. Avranno titolo di *Pensionari anziani* li tre del §. 2; di *Pensionarj giubilati* li due del §. 4.

BRITISH MUSEUM
NAT. HIST.



Gravé par Sophie Sellier

ALBERTO FORTIS

§. 7. Potrà il Pensionario anziano passare a goder la pensione come giubilato, sotto le condizioni prescritte dal §. 4, e quando l'un de' due posti sia vacuo.

XXIII. A compensazion delle spese, che incontrano i Quaranta ne' porti di lettere per cagion della Società, ogni anno, nel mese di Gennajo, sarà fatto l'esame, onde riconoscere i Membri attuali, che avranno corrisposto a tutte le lettere del Presidente e del Segretario nel corso dell'anno antecedente, e dentro li rispettivi termini di tempo in esse specificati; ciascuno de' quali Socj avrà diritto di esigere zecchini tre dalla cassa della Compagnia.

XXIV. §. 1. Ogni volta, che la forza pecuniaria della stessa Società lo consenta, si esporranno programmi al concorso pubblico. Risoluto ciò dal Presidente, il Segretario inviterà li Socj attuali a proporre argomenti. Questi esser dovranno, o Fisici, o Matematici, o Fisico-Matematici, o in qualunque modo giovevoli a queste scienze, e sempre applicabili ad utile general dell'Italia. Il Segretario li manderà stampati a ciascun Socio, pretermettendo quelli che uscissero dalle condizioni ora prescritte. Ogni Socio spedirà al Segretario il proprio suffragio per la scelta dell'argomento, e dichiarerà insieme qual premio reputi conveniente e qual tempo alla facitura ed alla presentazione delle Memorie. Quel tema che avrà più suffragi, sarà adottato: nel caso di parità di voti, deciderà la sorte.

§. 2. Tosto si comunicherà alla Compagnia l'argomento coronato, ed il numero de' suffragi riscossi da ogni argomento. Nell'atto stesso sarà richiesto ciaschedun Socio attuale di nominarne tre (di qualunque Classe, purchè Italiani, e dimoranti attualmente in Italia); quelli cioè, che ciascuno, osservato il quesito, stimerà più adattati a giudicar le Memorie che compariranno al concorso. Quei tre, ne' quali concorrerà maggior numero di suffragi (l'ugnaglianza rimovasi con la sorte), s'intenderanno destinati a pronunziare il giudizio.

§. 3. Nelle occasioni statuite sopra, saranno come non fatte le risposte de' Socj, qualora non giungano al Segretario dentro quaranta giorni dalla data della rispettiva Circolare di Lui.

§. 4. Il nome de' Giudici eletti rimarrà a sola notizia del Presidente e del Segretario: se non che ciascun di quelli sarà fatto consapevole della propria destinazione, con divieto di

concorrere al programma e di manifestarla a chicchessia: niun di loro saprà i suoi Colleghi. Se qualcun ricusasse, sarà sostituito il prossimo inferiore in quantità di voti. Ogni Giudice riceverà, dopo pronunziato il giudizio, un decente compenso dell'esclusion dal concorso.

§. 5. Il Presidente, considerati i pareri de' Socj, lo stato economico della Società, e l'importanza di moltiplicare i programmi, stabilirà la grandezza del premio, ed il termine da assegnarsi al concorso. Sarà tosto promulgato il problema per tutta Italia. Ogni Italiano, anche Socio, potrà concorrere: rimangono esclusi li soli tre Giudici. Le Memorie dovranno essere inedite, scritte in lingua Italiana, e pervenute nelle mani del Segretario entro il termine prescritto dal programma: il nome degli Autori sarà occulto: ogni Memoria porterà in fronte un motto, e sarà accompagnata da un biglietto suggellato, contrassegnato al di fuori dal medesimo motto, e contenente, al di dentro in maniera occultissima, nome, cognome, patria, domicilio e professione dell'Autore. Il mancare a qualunque delle antecedenti condizioni fa perdere il premio.

§. 6. Tosto che il concorso sia chiuso, il Presidente, veduto il numero e l'estension delle Memorie, definirà il tempo, entro il quale ogni Giudice dovrà pronunziare il giudizio. Allora il Segretario trasmetterà le Memorie, tutte unite, ad uno de' Giudici: da cui restituite che siano, e notificato il proprio giudizio al Segretario, saranno da questo fatte pervenire ad altro Giudice; quindi con le regole stesse al terzo. Ogni Memoria coronata da un Giudice, sarà stampata col nome dell'Autore. Il premio sarà dato a quella Memoria, che venga coronata da tre, o da due Giudici. Se tutti e tre li giudizj fossero discordi, si dividerà il premio fra le tre Memorie coronate. Lo stesso si farà tra due coronate, qualora un Giudice neghi il premio a tutte le Memorie, e gli altri due non siano concordi. Che se fossero due li giudizj di negativa generale del premio, in tal caso il terzo giudizio non sarà di alcun valore: si notificherà alla Compagnia l'esito del giudizio e si passerà alla pubblicazione di nuovo programma, coi metodi stabiliti sopra.

§. 7. Ma quando sia conferito il premio, il Segretario annunzierà prontamente ai Socj ed a tutta l'Italia il nome degli Autori delle Memorie coronate, indicando quello cui spetta

il premio. Esse Memorie saranno stampate senza indugio; se ne spedirà un esemplare ad ogni Socio, 12 della propria a ciascun degli Autori coronati, 38 di più al premiato: i rimanenti si esporranno a vendita pubblica.

CATALOGO

DE' MEMBRI COMPONENTI LA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE.

CAGNOLI (Cav. Antonio) *Pensionario Giubilato* . Verona .

Socj Attuali

ALDINI (Cav. Giovanni) Consigliere di Stato degli Uditori . *Milano* .

AMORETTI (Cav. Ab. Carlo) Bibliotecario nell' Ambrosiana . *Milano* .

ARALDI (Cav. Michele) Segretario del R. Istituto Italiano . *Bologna* .

BONATI (Cav. Teodoro) *Pensionario Anziano* , e Professore d' Idrostatica nel Liceo . *Ferrara* .

BRERA (Valeriano Luigi) Professor di Clinica Medica nella R. Università . *Padova* .

BRUNACCI (Cav. Vincenzo) Professore di Matematica sublime nella R. Università . *Pavia* .

CALDANI (Floriano) Professore di Anotomìa umana nella R. Università . *Padova* .

CALDANI (Leopoldo Maria) Professore emerito nella R. Università . *Padova* .

CALUSO (Cav. Ab. Tommaso Valperga) Professor di lingue Orientali nell' Imp. Università . *Torino* .

CANTERZANI (Cav. Sebastiano) *Pensionario Anziano* e Professore di Fisica generale nella R. Università . *Bologna* .

CESARIS (Cav. Ab. Angelo) Astronomo nel R. Osservatorio di Brera . *Milano* .

CHIMINELLO (Ab. Vincenzo) Direttore del R. Osservatorio . *Padova* .

COSSALI (P. D. Pietro) C. R. Professore di Matematica sublime nella R. Università . *Padova* .

DANDOLO (Cav. Vincenzo) Provveditor Generale della Dalmazia . *Zara* .

DELANGES (Paolo) Ispettor generale Onorario alle acque e strade. *Brescia*.

FABBRONI (Giovanni) Direttore generale della Imperiale Zecca. *Firenze*.

FERRONI (Pietro) Matematico imperiale. *Firenze*.

FOSSOMBRONI (Cav. Vittorio). *Firenze*.

GALLINI (Stefano) Professore di Fisiologìa ed Anatomìa comparata nella R. Università. *Padova*.

GIOBERT (Giannantonio) Professore di Chimica generale e Mineralogìa nell' Imperiale Università. *Torino*.

GIOVENE (Giuseppe Maria) Canonico Arciprete. *Lecce*.

MAIRONI (Giovanni Daponte) Professore di Storia Naturale nel Liceo. *Bergamo*.

MALACARNE (Vincenzo) Professore d'Istituzioni Chirurgiche e d'Ostetricia nella R. Università. *Padova*.

MASCAGNI (Paolo) Professore d'anatomìa nell' Arcispedale. *Firenze*.

MOSCATI (Pietro) *Pensionario anziano*, Conte Senatore e Gran Dignitario dell' Ordine della Corona di Ferro. *Milano*.

PAOLI (Pietro) Professore di Matematica sublime nell' Imperiale Università. *Pisa*.

PARADISI (Giovanni) Conte Senatore e Gran Dignitario dell' Ordine reale della Corona di Ferro. *Milano*.

PESSUTI (Gioachino) Professore di Matematica sublime nell' Archigiunasio della Sapienza. *Roma*.

PEZZI (Francesco) Tenente Colonnello nel Corpo Imperiale del Genio Francese. *Genova*.

PIAZZI (P. D. Giuseppe) C. R. Professore d'Astronomia. *Palermo*.

PINI (Cav. Ermenegildo) C. R. Professore di Storia Naturale, Ispettor generale della publica Istruzione. *Milano*.

RACAGNI (P. D. Giuseppe Maria) C. R. Professore di Fisica nel R. Liceo. *Milano*.

RE (Cav. Filippo) Professore d'Agricoltura nella R. Università. *Bologna*.

RUBINI (Pietro) Professore di Medicina nella Imperiale Università. *Parma*.

RUFFINI (Cav. Paolo) Professore di Matematica sublime nella R. Scuola Militare. *Modena*.

SALADINI (Cav. Girolamo) Professore emerito nella R. Università . *Bologna* .

TARGIONI TOZZETTI (Ottaviano) Professore d' Agricoltura e di Botanica . *Firenze* .

VASSALLI EANDI (Anton Maria) Professore di Fisica, e Segretario dell' Accademia Imperiale . *Torino* .

VENTUROLI (Giuseppe) Professore di Matematica applicata nella R. Università . *Bologna* .

Divisione de' Socj Attuali in due Classi e indicazione de' Tomi, in cui hanno Memorie .

Classe Matematica .

Bonati	2. 5. 8. 8. 11.
Brunacci	14.
Cagnoli	3. 4. 4. 5. 5. 5. 6. 6. 6. 7. 7. 8. 8. 8. 9. 10. 11. 14.
Caluso	9. 12. 14.
Canterzani	2. 5. 8. 11. 14.
Cesaris	2. 10. (pag. x) 11. (pag. 176.) 14.
Chiminello	7.8.8.9.9.10.10.11.11.11.12.12.12.13.13.14.14.14.
Cossali	9. 10. 13.
Delanges	3. 4. 5. 5. 8. 10. 12. 12. 13. 13. 14.
Ferroni	5. 7. 9. 10. 10. 11. 12. 14.
Fossombroni	3. 7. 9. 12. 13.
Paoli	2. 4. 4. 6. 6. 8. 9. 9. 10. 13.
Paradisi	.
Pessuti	11. 13. 13. 14.
Pezzi	4. 5. 6. 8. 11. 11. 13.
Piazzi	11. 12. 12. 13.
Racagni	10. 13.
Ruffini	9. 9. 10. 12. 12. 13.
Saladini	9. 10. 11. 12.
Venturoli	12. 14.

Classe Fisica.

Aldini 14.
Amoretti 8. 10. 12. 13.
Araldi 10. 11. 12. 13.
Brera 14.
Caldani *Floriano* 7. 8. 12. 13.
Caldani *Leopoldo* 4. 7. 8. 9. 10. 12. 12. 13. 14. 14.
Dandolo .
Fabbroni 10. 11. 12. 13. 14.
Gallini 14.
Giobert 10. 13.
Giovene 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 14. 14.
Maironi Daponte 4. 9. 9. 11. 13. 14.
Malacarne 1. 2. 3. 3. 4. 4. 5. 6. 7. 8. 8. 9. 9. 10. 11. 12. 12. 13. 14.
Mascagni 8. 11. . . .
Moscati 1. 5. 10. 13.
Pini 3. 5. 6. 6. 9. 10. 12. 13. 13. 14.
Re 12. 14.
Rubini 14.
Targioni Tozzetti 11. 13. 13. 14.
Vassalli Eandi 4. 8. 10. 10. 13. 14.

Socj Emeriti.

BRUGNATELLI (Luigi) Professore di Chimica nella R. Università. *Pavia.*
LAGRANGE (Lodovico) *Parigi.*
ORIANI (Cav. Ab. Barnaba) Astronomo nel R. Osservatorio di Brera. *Milano.*
POLI (Giuseppe Saverio) Direttore del R. Museo di Storia naturale. *Napoli.*
ROSA (Cav. Michele) *Rimini.*
SALUZZO (Giuseppe Angelo). *Torino.*
SCARPA (Cav. Antonio) Professore nella R. Università. *Pavia.*
STRATICO (Cav. Simone) Ispettor generale d'acque e strade. *Milano.*
VENTURI (Cav. Gio: Battista). *Berna.*
VOLTA (Cav. Alessandro) Professore nella R. Università. *Pavia.*

Socj Onorarj.

BRAMBILLA (Paolo) Professore di Matematica nel R. Liceo. *Milano.*
DELBENE (Benedetto) Segretario perpetuo dell' Accademia d' Agricoltura, Commercio ed Arti. *Verona.*
LANDI (Ferdinando). *Piacenza.*
LOMBARDI (Antonio) Bibliotecario publico. *Modena.*
PINDEMONTE (Ippolito). *Venezia.*
POZZETTI (P. D. Pompilio) C. R. delle Scuole Pie, Prefetto della R. Biblioteca. *Bologna.*
ROSSI (Cav. Luigi) Segretario generale nel Dipartimento della publica Istruzione. *Milano.*
VIVORIO (Ab. Agostino) Ispettor generale onorario d' acque e strade. *Vicenza.*

Socj Stranieri.

ACHARD. *Berlino.*
BANCKS. *Londra.*
CHAPTAL. *Parigi.*
DELAMBRE. *Parigi.*
HERSCHEL. *Londra.*
HAUY. *Parigi.*
LAPLACE. *Parigi.*
MASKELINE. *Londra.*
NARVOYZ. *Wilna.*
OLBERS. *Brema.*
SENEBIER. *Ginevra.*
ZACH. *Gota.*

Segretario.

. . . . . .

Vice-Segretario Amministratore.

. . . . . .

Alle dette due incombenze supplisce provvisoriamente col titolo di Prosegretario

OTTAVIO CAGNOLI.

ELOGIO LETTERARIO

Del Sig. Alberto Fortis

Membro della Società Italiana delle Scienze, Prefetto della R. Biblioteca in Bologna, Membro e Segretario dell'Istituto Nazionale Italiano, e di molte Accademie (1).

Scritto dal Sig. Carlo Amoretti.

Ricevuto li 20 *Luglio* 1808.

I. No, non rimarrà inonorata, senza che alcuno rammenti a chi la mira quali ossa e ceneri chiuda, la tomba dell'Amico mio, del mio Collega, dell'uomo illustre che onorò le Società tutte a cui appartenne, la patria sua, l'Italia intera, le lettere e le scienze che coltivò e promosse. No, Alberto Fortis non rimarrà senza un elogio. Io mi lusingai che lo scrivesse l'eloquente ed erudito Segretario della nostra Società Italiana delle Scienze, il ch. *Pozzetti*, il quale, uso a consacrare la sua penna all'encomio degli uomini che onorarono e giovarono l'umanità co' loro studj, voglioso era di far conoscere ai posteri i meriti letterarj del Collega nostro ed Amico (2); ma poichè, destinato a più sublimi cure, egli compiere non potè i voti proprj e i nostri, io, per quanto le mie forze varranno, supplirò per lui. Meno vivo e animato senza dubbio sarà il ritratto che faronne; ma non sarà men somiglievole: giacchè, oltre il legame che mi strinse a Fortis nella nostra giovinezza, il commercio letterario, quasi non mai interrotto d'oltre trent'anni, il frequente convivere, le

(1) Le Accademie e Società letterarie alle quali appartenne sono, oltre l'Istituto Italiano, e la Società Italiana delle Scienze, quelle di Bologna, di Bordeaux, di Siena, di Padova, di Lunden nella Scania, di Berlino, di Mantova, di Napoli, tutte le agronomiche Società dello Stato Veneto, la Patriotica di Milano, ec.

(2) Vedi la mia Memoria epistolare diretta al P. *Pozzetti* = *Sull'azione d'alcune sostanze* ec. *Mem. della Soc. Ital. Tom. XIII.*

sociali peregrinazioni, e l'uniformità degli studj mi hanno dato il modo di tutte conoscere le letterarie sue produzioni, di tener dietro ai passi da lui segnati nella via del sapere, e quasi direi anche alle tracce de' movimenti del suo cuore.

Per non discostarmi dallo scopo ch' ebbe la Società nostra quando propose di ornare i volumi delle sue Memorie cogli elogj de' Socj che l'hanno servita, io non farò che indicare per quali vie FORTIS giunse a tanto sapere da essere giustamente valutato qual uno de' luminari delle scienze nell' Italia non solo, ma presso tutte le colte nazioni; come nuovi lumi egli aggiunse alla general massa dell' umano sapere; e come le cognizioni sue a giovar gli uomini principalmente diresse.

II. D'un uomo, che si fè grande collo studio, col lavoro, e col sapere, è vano rintracciare i natali. Tuttavia di FORTIS gioverà dire che nato essendo nell' agosto del 1741 da un padre occupato nello studio delle leggi, e nel Veneto Foro, e da una madre che all' avvenenza congiungeva uno spirito colto ed una naturale amabilità serbata sino alla decrepitezza, ebbe la sventura di perdere troppo presto il primo, e la ventura di veder poi fatta consorte del Sig. Conte Capodilista, ricco e nobile patrizio padovano, la madre sua. La di lei casa era, dirò così, l'Ateneo, ove, ben accolti dall' uomo liberale e colto, e dalla donna d'ingegno come di grazie fornita, adunavansi i più illustri Professori di quell' Università. Un *Toaldo* calcolatore infaticabile del moto degli astri e delle stesse incalcolabili meteore; un *Sibiliato* e un *Cesarotti* che le bellezze delle amene lettere tramandateci dagli antichi tempi e da rimoti climi sapeano sì bene analizzare, imitare, insegnare; un *Caldani* che l'umano macchinismo sì ben conosceva e co' più savj precetti d' Esculapio sapea conservare incolume; un *Ferrari* uomo nella interpretazione delle lingue esotiche versatissimo; un *Vallisnieri* che la storia della natura, scienza allor quasi nuova, sulle tracce dell' immortal suo padre illustrava; un *Carburi* valente Chimico; uno *Stratico* in ogni maniera di scienze versato; ed altri molti luminari dello studio Patavino de' quali alcuni lo illustrano tuttavia, erano maestri che FORTIS giornalmente udiva, erano esempli luminosi, ch' egli avea sempre dinanzi agli occhi.

III. Così nacque in lui da' più teneri anni l'amore dello studio, così sviluppossi presto in lui l'ingegno, l'estro poeti-

co s'accese, e al terzo lustro il suo spirito era superiore all'età sua. Le opinioni religiose allor vigenti sulla scelta dello stato, le circostanze di non ricca domestica suppellettile, la perdita del padre, la madre d'altra famiglia occupata, tutto, senza consultare il suo temperamento e 'l suo cuore, concorse a decider di lui, che, per trarre da' suoi talenti il miglior partito, conveniagli vestir lane religiose, ed entrò a sedici anni nell'ordine de'Romitani di S. Agostino.

IV. Egli di buona fede, e con tutta l'alacrità, de' doveri del proprio stato occupossi; ma tosto s'avvide che una Fisica di parole anzicchè di cose insegnavasi allora nel chiostro, e rammentò quello che dianzi da *Vallisnieri* udito aveva ed appreso. Allo studio delle cose ecclesiastiche e divine si volle ch'egli quindi applicasse. La facil memoria, e 'l pronto ingegno faceano bensì ch'egli alle volute prove di studio non mancasse mai; ma l'ozio che gli restava ancora consacrava alla poesia e allo studio della natura. In patria, in Verona, in Bologna mostrò che 'l cangiar luogo e maestri non bastava a cangiare le sue inclinazioni. „ Vogliono, mi scriveva egli da „ Verona, che io studii Teologia, ed io studio Geologia, e „ un poema geologico sto mettendo insieme, con cui m'istrui„ sco e m'occupo piacevolmente „. Lo componea di fatti: nol compiè mai; ma per darne un saggio ne ha poi pubblicata la tessitura e molte ottave nel suo *Giornale*, cui diè titolo di *Genio Letterario* (3). Vedesi da questo lavoro di gioventù qual fervida immaginazione egli avesse, come sapesse ben trarre partito dalla Mitologia e dalla Teologia medesima, per trattare poeticamente un sì steril soggetto, e sì poco atto alla poesia, qual è l'interna struttura del globo che abitiamo.

V. Il celebre e profondo indagatore delle lingue e opinioni d'Oriente il P. *Giorgi*, allora procurator generale dell'ordine agostiniano e prefetto della biblioteca Angelica, avendo avuta notizia dell'ingegno sommo di Fortis, a Roma chiamollo, acciò nella biblioteca stessa sotto gli occhi suoi profondi studj facesse nelle cose teologiche, e nelle lingue esotiche specialmente. Fortis studiò queste, ma quelle neglesse.

(3) Vedi la nota 5.

„ Sto nella biblioteca, mi scrivea di colà, mi si dice di leg-
„ gere San Basilio, ed io leggo Omero, che v'ho trovato vi-
„ cino „. E fu colà ch'egli fece uno studio profondo d'Antiquaria e di Filologia, acquistando notizie peregrine ed estese, delle quali seppe fare sì buon uso di poi. Gli fu consentito alla fine di tornarsene in patria; e approffittando allora della facilità con cui Clemente XIV, saviissimo Pontefice, acconsentia che chi non trovavasi ben collocato ne' chiostri n'uscisse, FORTIS chiese ed ottenne la sua secolarizzazione.

VI. Fu libero allora di volgere ove più gli piacesse i pensieri e i passi; ma non uso alla domestica economia, e non ricco di censo, che a voglia sua non accrescea la madre, bramoso altronde di percorrere ed esaminare il suo paese e l'altrui, pensar gli fu d'uopo di trovare, e trovar seppe, nella fatica pesante ed improba di compilare un Giornale e di tradurre, i mezzi onde soddisfare i bisogni veri e i fattizj. Fatica improba, è vero, è quella del Giornalista; ma non v'ha dubbio che ad istruirsi sopra ogni altro modo essa conduca. Per ciò gran parte egli ebbe nel *Giornale Enciclopedico* (4), che, sotto il nome della ingegnosa e colta amica sua *Elisabetta Caminer Turra*, per molti anni uscì dai torchi veneti e vicentini: e ben in esso gli articoli di FORTIS ora profondamente ragionati, ora per acuta critica pungenti, ora con elegante lepore esposti, agevolmente dagli altri distinguonsi. Più faticoso fu ancora per lui, e per l'Italia più istruttivo il Giornale summentovato cui diè titolo di *Genio Letterario*, il quale per le circostanze de' tempi ebbe troppo poca durata (5). I torchi veneti pur sudarono per varie sue traduzioni di considerevoli storie, alle quali apporre non volle il proprio nome, ma che, all'esattezza, alla purezza della lingua, e all'armonia dello stile, ben mostrano a chi è uso a leggere gli scritti suoi, che sono suo lavoro. So che lo Stoico infingardo più comoda cosa giudica, e più onorevol la reputa, lo scemare i desiderj che accrescere colla fatica i mezzi di soddisfarli, ma FORTIS, i cui desiderj diveniano bisogni insuperabili; FORTIS che non volea dovere ad altri che a sè stesso i mezzi onde

(4) Cominciò nel 1770, e si sostenne per moltissimi anni.

(5) Cominciò nel 1794, e non ne uscirono che 18 volumetti.

soddisfarli, colla penna e colle veglie a tutto suppliva; e ben anche n'acquistava talora i mezzi onde sollevare gl'ingegni che la miseria avrebbe oppressi e soffocati per sempre. Oh! potess'io nominare quella fronte che videsi poi coronata d'alloro, e che a lui dovè i primi passi che fece per le vie del Parnasso!

VII. Ben sentia però Fortis che questo non faceagli un nome, e l'amor della gloria, ch'è lo stimolo e l'anima del Letterato, più alti disegni gli fe concepire: ei volea, nel procurare de'lumi e qualche fama a sè stesso, giovare alla patria sua, illustrarla, istruirla. Un'estesissima provincia possedea la Repubblica Veneta, che stata era nelle età rimote ornata e arricchita dalle scienze e utili arti, e che (fosse politica, fosse il destino delle cose di quaggiù) era da molti secoli ridotta poco meno che all'abbrutimento. Parlo della Dalmazia. Non si conosceano o si voleano celate le ricchezze che quel suolo chiudeva, e soffocate sin da'primi germogli erano quelle che poteano emergere. Fortis conoscerla volle, e farla conoscere ne'varj suoi aspetti. Partì nel 1771 da Venezia e approdò all'isola di Cherso insieme a due valenti Letterati il Sig. *Symonds* gentiluomo inglese, e'l Sig. *Cirillo* chiaro professore napolitano, che la Storia naturale e la Botanica in miserando modo perderono sul finire dello scorso secolo. Volendo egli al suo ritorno dar contezza del percorso paese, non solo da Naturalista ma anche da profondo Filologo, studionne la più vetusta storia, e dimostrò così come il viaggio, (riputato non sol favoloso, ma pur impossibile in cui gli Argonauti dall'Eusino al mare iperboreo per laghi e fiumi tragittarono, e pel Danubio vennero nell'Adriatico) possibil fosse di fatti, prima che rivoluzioni geologiche, ora lente ora subitanee, sconvolta avessero quell'estrema parte ove l'Italia colla Germania, e ove l'Europa coll'Asia confina. Colà col Professor napolitano s'occupò della Botanica, col gentiluomo inglese osservò lo stato dell'Agricoltura mal secondante i doni del cielo e del suolo; ma sopra tutto occupossi della Storia naturale. Osservò l'emigrazione periodica de'varj pesci, l'intermittenza quinquennale del lago di Jesero, l'accresciuto talora, e più frequentemente il diminuito lido, le cristallizzazioni moltiformi, i corpi marini onde sono composti que'marmi calcari; e quelle ossa formanti brecce, che, reputate essendo umane, davano

luogo a gran conghietture sulle più rimote epoche, e che uno de' principali oggetti furono di quel viaggio. S'ingannò egli allora su questo punto, ma non arrossì poi di confessare l'abbaglio preso. Miseri que' Dotti ai quali nemmeno l'evidenza può far ritrattare la sentenza pronunciata!

VIII. Molta gloria, e qualche economico vantaggio gli produsse il ragguaglio che allor pubblicò del suo viaggio (6); ma il profitto maggiore che ne ritrasse fu l'essere stato poi fornito degli opportuni mezzi onde tutta perlustrare con occhio filosofico, e, come direbbesi ora, coi principj della Statistica, quella ignorata provincia. Andovvi prima col generoso e infaticabile coltivatore della Storia naturale e delle Arti Milord *Hervey* vescovo di *Londondery*, e ne percorse seco la parte che più interessava la Geologia. Tornovvi nel 1774 co' mezzi che somministrarongli alcuni ragguardevoli soggetti dell'ora estinta Veneta Repubblica, i quali vantaggio grande, e non a torto sen riprometteano. Prima sua cura fu lo studio della lingua illirica, onde penetrare fra quelle valli, e vagare per que' monti, ove nè pubblici alberghi sono, nè una regolar polizia v'era che allo straniero fornisse sicurezza e mezzi di sussistenza, dovendo egli interamente confidare sulla ingenua ospitalità di quegli abitanti, che lungi dal commercio quasi altre leggi non conosceano fuorchè quelle della natura. Chi parla la lingua loro lusinga il loro amor proprio, e una specie di fratellanza con loro contrae. L'opera che al suo ritorno pubbliconne ben prova, ne' frequenti saggi che ci dà di poesie illiriche da lui trasportate in verso italiano, quanto egli avesse appreso quel lingnaggio; e mostra di quali oggetti, e come bene ei siasi occupato.

Pria di visitare quell'estesa provincia FORTIS ricercar seppe, e notare quanto di que' paesi ci hanno tramandato gli antichi Geografi e Storici; e chi la sua opera legge, ammira l'estesa sua erudizione accompagnata sempre da una critica giudiziosa. Egli ci addita gli avanzi tuttora sussistenti de' primi greci abitatori di quella regione; indi de' Romani che in servitù li ridussero; poscia de' Turchi, che, delle scienze nimici come delle virtù sociali, apportarono in quelle belle con-

(6) *Saggio d' osservazioni sopra l' isola di Cherso ed Osero* d' Alberto Fortis. *Venezia presso Storti, in 4° fig.*

trade la desolazione, da cui non certo riebbersi sotto il veneto governo, che, quasi conscio della propria debolezza, sembra che temesse di dar vigore a lontani popoli, cui più colla politica che coll'armi tenea soggetti. Or le cose cangiarono. Chi impera, poichè non conosce timore, vuole che tutto si tenti e si faccia perchè la Dalmazia le fisiche sue forze racquisti; e l'illustre Collega nostro Sig. Cav. *Dandolo* destinatovi a Provveditore ben ne seconda le viste luminose e benefiche.

IX. Fortis ne' suoi viaggi pressochè tutta la Dalmazia percorse. Ci fè conoscere quanto interessar può il Naturalista, nella composizione de' monti: osservò le vetustissime tracce del fuoco in alcuni tratti vulcanici ai confini meridionali della Liburnia, e alle sorgenti del Tiluro; le tracce del mare nelle conchiglie e ne' pesci de' quali trovò le ossa e le impronte; e ben anche le tracce de' fiumi, che l'alveo aveano ove sorgon ora le brecciose e arenose vette de' monti. Non contento di visitarne la superficie, si strascinò con incomodo e rischio ne' vuoti seni de' monti stessi, ch'egli a ragione assomigliò alle infernali bolge di Dante. Istruito dagli antichi racconti rintracciò le miniere, e tranne due che ve n'ha di pissasfalto, avvertì che le metalliche cercar dovcansi ne' monti della Bossina daddove le acque ne traevano al piano gli indizj. Scoperte allora non erano le miniere del Litantrace, dalle quali considerevole vantaggio privato e pubblico si trae, e maggiore se ne spera. Bensì un'utilità non lontana ei riprometteasi dai marmi, che, non ignoti agli antichi, servir poteano, e 'l potranno ancora a risparmiare l'oro e la spesa che impiegansi per averne de' non più belli dall'estero. Un vantaggio ancor maggiore egli riprometteasi dall'Agricoltura, che avendo frequentemente opportuno il terreno, e sempre favorevole il clima, divenir può nutrice di numerose genti, non solo coi doni più squisiti di Bacco, come lo fu un tempo, e coll'educazione di scelte gregge, ma ancora con que' prodotti, che danno poche regioni, quali sono la manna, il mastice, e l'olio, e colla pescagione cui abbondante renderebbe l'osservata emigrazione de' pesci costeggianti le sponde, e delle anguille ricercatrici di paludi; e che più vantaggiosa ancor diverrebbe, ove il sale, che copiosissimo aver si potrebbe su que' lidi, serbasse quelle derrate al consumo perenne, e all'

esportazione. Nè aridi ragguagli sulle osservate produzioni naturali, scrisse FORTIS ai rispettabili amici suoi (7); ma, studiando egli gli uomini nel tempo stesso che esaminava i paesi, cen mostrò i costumi sovente lontani dai nostri, e l'influenza che su di essi hanno la religione, l'educazione, e le leggi. Piace il suo libro nel tempo stesso che istruisce, poichè oltre l'essere scritto con tutta la purezza e l'eleganza della lingua nostra, nel che pochi l'agguagliano, sono le sue narrazioni, o le proprie avventure racconti, o i casi altrui, sempre condite di quell'attico sale, per cui volontieri le legge anche chi la storia naturale non ben intende, o non cura.

X. Questa seconda sua produzione, che gli acquistò tal celebrità per cui alle primarie Accademie scientifiche d'Europa fu ascritto, e che venne tosto tradotta in tutti i colti idiomi, gli fu di molto profitto, non tanto per sè stessa, quanto perchè gli conciliò maggiormente l'amore della madre sua, la quale, rimasta allora vedova e ricca, più largamente ai suoi bisogni, e ai desiderj suoi provvedeva. Potè egli così divenire proprietario d'una casa con pochi campi in San Pietro d'Arzignano, nel vicentino; e diessi allora ad esaminare a tutt'agio que' colli, e que' monti, che sono uno de' più grandi monumenti dello sconvolgimento del Globo terracqueo, e della sua vetustà. I fondamenti stessi della sua casa mostrarongli la forma interna ovale a strati concentrici de' gran massi che il fuoco ha fusi, vibrati per l'aria, rotolati pel dosso de' monti, e che il raffreddamento ha cristallizzati in forme d'ogni maniera. La non lontana Vestena e 'l Bolca ove coll'amico *Gazola* andava frequentemente in traccia degli stampativi pesci, diegli il modo non solo di conghietturare come e quando questi colà siano stati sepolti, ma ben anche di determinarne le specie, e 'l luogo natio (8). Esaminò presso Roncà le conchiglie fossili che vomitate aveva il vulcano insieme al fango marino (9), e presso Romagnano le grandi e varie ossa in enorme quan-

(7) *Viaggio in Dalmazia dell'Ab.* Alberto Fortis. *Venezia presso Milocco. Tomi 2 in 4 fig.* L'Opera è scritta a forma di lettere dirette a varii rispettabili personaggi.

(8) *Lettre à M. le Comte Cassini.* Nel *Journ. de physique de Rozier. Mars.* 1786.

(9) *Della Valle Vulcanico-marina di Roncà. Memoria Orittologica del Sig. Ab.* Fortis. *Venezia presso Palese* 1778 *in* 4° *fig.*

quantità raunate nel seno d'un monte (10). Col cel. *Strange* tutti i colli veronesi e vicentini e berici ed euganei percorse, e molta parte ebbe negli scritti di quel preclaro Ministro e Socio della R. Accademia di Londra, di cui illustrò e in lingua nostra dall'inglese tradusse la più importante delle sue letterarie produzioni (11).

XI. Percorse quindi con pari alacrità ed attenzione i colli euganei, specialmente dacchè la madre lasciato avealo, morendo, erede di comoda casa e di non angusti fondi a Galzignano in mezzo ai colli medesimi. Ricerche ei fece colà moltiplici, continue, e diligenti, or solo, ora coi colti amici, fra i quali nominerò *Dondi Orologio*, *Olivi*, *Darìo*, e *Dolomieu;* e non solo la fisica costituzione di que' colli esaminò con occhio da Naturalista, le antiche eruzioni colle recenti del Vesuvio e dell'Etna mettendo in confronto; ma cercovvi ciò che alla patria apportar poteva vantaggio. Non vi trovò, è vero, i marmi tutti e i vetri e le terre, che altri avea creduto vedervi (il che diede occasione ai scritti mordaci forse troppo e pungenti), ma vide e indicò la lava fatiscente ch'era stata in origin lapillo, e induratasi ora offre de' sassi refrattarj alla domestica economia e alle fornaci; fe meglio conoscere l'arena ferrigna che da que' colli vulcanici l'industre contadino ritrae, e trovò la torba, succedaneo utilissimo alle legne, della quale parlerò fra poco.

XII. Non contento d'essere Naturalista volle pur qui le opere di natura combinare colle opinioni degli antichi Filosofi e colle favole istesse. Se nella Dalmazia avea saputo trovare nelle or aride or acquose valli le tracce della navigazione degli Argonauti, qui riconobbe ne' colli berici ed euganei le isole elettridi (12), e mostrò ancor meglio quanto l'uom di genio sa coll'osservazione del Naturalista l'erudizione del Filologo ben combinare. Nella favola di Fetonte riputata un sogno di poeti Fortis seppe vedere uno storico avvenimento,

(10) *Delle ossa d' Elefanti ed altre curiosità naturali de' monti di Romagnano nel Veronese. Dell' Ab.* Alberto Fortis. *Vicenza presso Turra*, 1786 *in* 8° *fig.*

(11) *De' monti colonnari, e altri fenomeni vulcanici dello Stato Veneto. Opuscoli scelti di Milano Tom. I, pag.* 73.

(12) *Intorno la vera situazione delle Isole Elettridi degli Antichi. Mem. dell' Accad. di Padova, Tom. I, pag.* 78.

e ne indicò i monumenti scritti di man di Natura. Arse, dic' egli, il Globo alle foci dell'Eridano; e moltiplici colli ardenti l'interno fuoco sollevò, come far suole, dalle onde, e isole divennero. Fetonte, nome ch'è tuttavia quello d'alcuno di que' paesi, e che significa fuoco e splendore, vi diede origine. L'elettro o ambra, frequente in quella parte degli Appennini, e che le acque sovente portano al lido, è le lagrime delle sue sorelle che diede il nome alle isole: nome che fors'anco rapportasi al metallo elettro, che misto alle paglinzze d'oro fra le arene del Po raccoglieasi un tempo, e forse si raccoglie ancora (13). Tutto insomma combina per le ingegnose conghietture di FORTIS a mostrarci nella favola di Fetonte la vetustissima conflagrazione de' vulcani de' quali il Naturalista e 'l Curioso ammirano gli avanzi, nelle pozzuolane, nelle scorie, ne' vetri obsidiani, e sopra tutto ne' sorprendenti ammassi di colonne basaltine, che l'opra contemporanea sono del fuoco e del mare.

XIII. Avendo così colle opere pubblicate acresciuta la letteraria riputazione, e per l'eredità materna moltiplicati i mezzi economici, FORTIS seguì l'invincibile impulso che sentiasi di tutta percorrere l'Italia, di cui proponeasi un giorno di scrivere la geologia. Venne a Milano, ove progettavasi allora un'esatta Mappa della Lombardia, e 'l mecenate de' Letterati Conte *di Firmian* proposegli di perlustrare il paese nostro per segnarvi le sì importanti, e sì trascurate note mineralogiche; e, sebbene non avesse luogo il progetto, FORTIS visitò le vicine Alpi: e sui monti bergamaschi vedute avendo delle fonti intermittenti, spiegò ingegnosamente il fenomeno coll'ipotesi d'un argine d'interne arene, alternamente dalle acque formato e distrutto (14). Incontratosi sul monte Adula col ch. Minerologo *Hacquet*, seco una parte di quella gran catena percorse; e rividdelo poi ne' monti dell'Illirio, nel qual viaggio non solo osservò l'indole delle terre e de' sassi e i corpi marini che ne fanno parte; ma, erudito Geologo, dallo stato attuale de' fiumi, de' laghi, delle valli, e delle caverne, e sopra tutto delle acque in gran coppia sottocorrenti, argomentò

---

(13) Vedasi il mio Trattato d'*Elettrometria Animale*. *Parte I*, *Cap. XIII*, *num.* 139.
(14) *Opusc. scelti*, *Tom. I*, *pag.* 215.

la possibilità del viaggio degli Argonauti dall'Eusino all'Adriatico (15). Percorse la Toscana, e presso il lago di Bolsena, esaminando le acque di Latera, ne riconobbe col fatto, e ne spiegò colla teoria chimica allora ricevuta la virtù antisettica (16). Visitò attentamente i contorni di Roma, e la famosa Allumiera della Tolfa, ove nel 1801 io trovai che caro ancora era il suo nome per le date sagge avvertenze.

XIV. Per conoscere in grande l'azione attuale del fuoco vulcanico portossi nel 1780 sull'Etna, penetrò, malgrado il caldo e 'l penetrante vapor sulfureo, ne' suoi fianchi da recente eruzione squarciati, onde, dal confronto di ciò che vedeva con altri fenomeni vulcanici distanti di tempo e di luogo, formare ragionevoli congetture sull'origin loro; e insegnò coll'esempio ai Naturalisti a non far di que' sogni che chiamano Teorie generali. *Sogno anch'io*, scriv'egli al ch. Collini, *ma sogno in piccolo, e a così dire a ritagli, e le località sono l'elemento principale de' miei sogni* (17).

XV. Non meno savio consiglio ed esempio loro diede quando andò ad esaminare alcune delle isole minori poste fra le grandi isole del Mediterraneo e 'l Continente, cioè l'isola di Ventottene detta anticamente *Pandataria*, e l'isola Ponza. *Io sono avvezzo*, dic'egli, *a scrivere sui luoghi che sto osservando, convinto che la frequenza delle inesattezze de' Viaggiatori Naturalisti viene dall'aver essi avuta troppo buona opinione della loro memoria* (18). È mirabile l'esattezza con cui descrisse non solo le diverse sostanze che quelle isole compongono, ma pur tutte le varietà delle lave che in esse s'incontrano, la direzione loro, la posizione, lo stato di durezza o di fatiscenza, ond'argomentarne l'origine, la formazione, l'età, gli sconvolgimenti a cui soggiacquero, e ben anche i vantaggi che potrebbono ritrarsene. Nuova è l'osservazione che fa su i balani, specie di conchiglia anfibia, alla cui vita bastano gli spruzzi dell'acqua marina. Istruttivo, anche per chi

---

(15) *Lettera Orittografica sull'Illirio, Carniola* ec. *Opusc. scelti. Tom. I, p.* 254.

(16) *Lettera al Sig. Dott. Pirri. Scelta d'Opuscoli interessanti. Tom. II, pag.* 437. *in* 4°.

(17) *Lettera sulla probabilità della trasmutazione locale dell'argilla marina in lava vulcanizzata. Opusc. scelti. Tom. VI, pag.* 331.

(18) *Osservaz. litografiche sull'isole di Ventottene e Ponza. Saggi scientif. dell'Accad. di Pad. Tom. III, P. I, pag.* 155.

non cura la storia naturale, è quanto egli osservò riguardo ai resti degli antichi edifizj dell'isola Pandataria, dove, ora per vendetta, ora per giusto castigo i Romani di gran nome veniano rilegati; e fra questi la storia rammenta l'impudica Giulia, che se non divenne più saggia in quel ritiro, vi fu meno scandalosa e di minor disdoro al talamo imperiale. Le stesse osservazioni fece FORTIS sull'isola Ponza insieme al cel. Naturalista *Hawkins*, confrontando sovente que' prodotti vulcanici con quelli de' vulcani estinti del Continente, e mostrando il vantaggio che da quelli come da questi avere si potrebbe; e in tutto mostra diligenza, penetrazione, coraggio ed erudizione. Così avess'egli pubblicate le osservazioni fatte alle isole del Giglio, e d'Elba, l'ultima delle quali cotanto interessa la metallurgia!

XVI. Invitato da due suoi colti amici andò nella Puglia e nella Calabria specialmente per esaminare in questa gli effetti del disastro che l'avea poco prima sconvolta, e in molta parte distrutta. Allora fu che nella Puglia al Pulo di Molfetta fece l'importante scoperta della nitriera naturale: scoperta che apportar doveva un vantaggio grandissimo al regio Erario, e liberare al tempo stesso la nazione dall'incomodo e talora periglioso diritto de' ricercatori delle terre nitrose nella casa d'ogni abitante. Dovea questi vantaggi la scoperta sua apportare, ma non gli apportò, perchè, scriv'egli, il ben pubblico divenìa perdita privata: e non trattennesi dal manifestare le offerte fattegli e ricusate, perchè, confessando un abbaglio che non avea preso, rinunziasse alla gloria dell'utile scoperta. Non gli bastò che la Corte, riconoscendo il merito del suo ritrovato, gli conferisse il titolo e le rendite d'una Badìa, ma a confutare le assurde asserzioni di chi negava l'esistenza, e la possibilità d'un nitro naturale, egli condusse ad esaminare il Pulo di Molfetta i più valenti Fisici e Chimici, d'ogni nazione che in que' dì viaggiavano in quella parte d'Italia, fra i quali posso nominare il tedesco *Zimmermann*, e 'l mentovato inglese *Hawkins*; manifestò l'assurdità de' processi di chi, incaricato a riconoscere in quel luogo la coppia del nitro, studiossi co' mezzi chimici d'impiccolirne il prodotto; diede e mandò agli amici suoi il sasso nitrifero, da cui vedesi emergere spontaneo quel sale; e un'erudita dissertazione scris-

se onde provare che non infrequenti sono tali naturali nitriere in molte parti del Globo (19).

XVII. Così nessun vantaggio per sè e per altri potè trarre in Napoli dall'Allumiera, che progettata aveva alla solfatara di Pozzuolo; e in uno scritto che io ebbi fra le mani, ben aveva esposte le ragioni fisiche della convenienza di tentare quello stabilimento, che l'illustre Ispettor generale de' Nitri del Regno d'Italia Sig. *Breislack* eseguì poi; e le ragioni politiche per le quali rimasto sarebbe ineseguito, o presto avrebbe cessato, come di fatti avvenne.

XVIII. E' fu vivendo in quella gran capitale che cominciò ad esaminare il fenomeno della Elettrometria sotterranea: fenomeno, di cui vide l'importanza, e previde i risultati che derivarne poteano al privato e pubblico comodo, all'agricoltura, e alla mineralogia specialmente, se era vero; e sentì la necessità di smascherarne l'impostura ove in questo avesse luogo. Cominciò le sue ricerche collo spirito prevenuto in opposizione a quanto di *Pennet* narravasi, malgrado la stima che giustamente concepita aveva pel ch. *Thouvenel*, il qual di quel Minerometra, dirò così, valeasi per formare la Carta Mineralogica dell'Italia. Ma fece tali sperimenti, sì ingegnosamente immaginati, e con tanta cautela diretti, che non potè dubitare dell'azione de' metalli, de' bitumi, e delle acque sopra quell'individuo, che allora credeasi poco meno che unico al mondo. Per meglio accertarsene seguillo in Calabria, nella Puglia, nella Romagna, e 'l condusse anche nella sua patria a Padova. Il ragguaglio ch'egli ne ha pubblicato, mostra quanto ne fosse persuaso, quanto abbia fatto per accertarsi di quella verità importante, con quanta imparzialità abbia osservato ed esposto quello che potea far nascere de' dubbj (20), e dalle lettere sue confidenziali scritte al cel. Amico nostro *Spallanzani* per ritenerlo da una disdetta dettatagli dal timore, ben rilevo quanto egli si sdegnasse contro la cabala di chi volea dominare alle opinioni fisiche come alle politiche. Tuttavia, poichè, percorrendo un sentiere poco battuto ancora, non

(19) *Del nitro minerale. Memoria storico-fisica del Sig. Ab.* Alberto Fortis. 1787 *in* 8° senza data di luogo. *Opuscoli scelti. Tom. XI, pag.* 145.

(20) *Lettera del Sig. Ab.* Fortis *al Sig. Ab.* Spallanzani *Sugli Sperimenti di* Pennet. *Opusc. scelti. Tom. XIV, pag.* 159.

avea bastanti argomenti onde convincere lo spirito dell'uomo inerte, o dell'uomo prevenuto, contento d'avere manifestata la verità risultante dalle sue ricerche, non s'affaticò a persuaderne gli altri; ma non tacque quando alcuno o di poca cautela negli sperimenti suoi, o di credulità soverchia agli altrui detti osò accusarlo (21); e la critica sua sferza gli fe sentire.

XIX. E quando gli sperimenti col pendolo fatti nella villa di Gualdo presso al Rubicone, ne' quali pur io ebbi parte nel 1790, e poscia moltiplicati in Padova, mostrarongli nelle proprie mani, e in quelle di parecchi colti amici evidente l'azione d'una sostanza sopra un'altra che su di essa tengasi pendente, vide allora in sè stesso un saggio, dirò così, di quell'azione che le sotterranee vene acque bituminose e metalliche aver possono su alcuni individui; e un evidente rapporto ravvisò fra l'azione de' metalli su *Pennet*, sulle cui dita la curva verga quasi spontanea s'aggirava, e que' fenomeni che in sè stesso e negli amici suoi co' variati giri e movimenti del pendolo scorgeva. Ma, poichè il Galvanismo non era ancor nato allora, e 'l cel. *Volta* non s'era avveduto ancora dell'azione positiva o negativa degli elettromotori, FORTIS non vedea quella catena che i fenomeni del suo pendolo insieme poteva legare: vedeva i segni evidenti co' quali parlava Natura, ma non sapea tradurli, dirò così, e interpretarli. Quindi a me affidò il Giornale de' suoi sperimenti, Giornale ch'io serbai, e poco meno che obbliai, fino a che veduta l'analogia de' fenomeni da lui registrati con quei del Galvanismo scevro da teorie, tutte le sue sperienze ripetei, e verificai; e da cento altre persone della stessa facoltà dotate feci che messi ne fossero fuor d'ogni dubbio, e a tutti noti i risultati (22). Oh! quanto sen sarebbe compiaciuto se avessimo egli ed io pensato a seriamente occuparsene negli anni che precederono la sua morte! Quanto godrebbe a veder replicati gli sperimenti suoi da valenti Fisici in Francia, in Inghilterra, in Germania! e forse non impunemente, per la sola ragione che tutti non so-

---

(21) Vedi il *Genio letterario*.

(22) *Sull'azione di varie sostanze sopra altre tenute pendenti su di esse. Sperimenti del Sig. Ab.* Alberto Fortis, *ripetuti ed accompagnati da analoghe osservazioni da* Carlo Amoretti. *Mem. della Soc. Italiana delle Sc. Tom. XIII, Parte II.* Vedi *Trattato d'elettrometria animale. Parte I, Capo IV.*

no della stessa sensibilità dotati, or li metterebbe in dubbio il Giornalista di Halla (23).

XX. Quando ebbe veduta in Napoli l'inutilità de' suoi progetti relativi al nitro e all'allume, pensò a ritirarsi in patria; e, giacchè n'aveva i mezzi, godere dell'ozio letterario. Ei cessò allora dall'aspirare alla cattedra di Storia Naturale vuota da molti anni per la morte di *Vallisnieri*, alla quale parea che il sapere, e la celebrità sua, e i vantaggi e la gloria apportata co' suoi scritti e colle sue ricerche alla propria Nazione, dovessero condurlo. Ivi, contento del titolo d'Accademico padovano, contribuì con replicate memorie ad accrescere il pregio de' volumi ch'essa diede alla luce (24). Riesaminò le opinioni altrui intorno agli oggetti de' quali s'era occupato. Ebbe il coraggio e la buona fede di ricredersi se gli si mostrò l'errore; ma guai se venia ripreso a torto da critico indiscreto! Egli era sempre eloquente di qualunque argomento parlasse o scrivesse, ma in una querela letteraria, ove assistito fosse dalla ragione, nessuno meglio di lui sapea percorrere tutte le vie dell'eloquenza per condannare i suoi detrattori al torto, al disprezzo, e al ridicolo. Ben lo sanno quelli che tentarono di diminuire il merito delle sue osservazioni in Dalmazia (25), dell'esattezza sua nell'assegnare l'età e 'l paese degli Izziotipoliti del Bolca (26) e della sua diligenza nel ricercare i prodotti utili degli Euganei (27).

XXI. Malgrado gli argomenti che aveva avuti della difficoltà di fare il ben pubblico quando è in opposizione al privato, pur nelle sue ricerche orittologico-vulcaniche non trascurò di far conoscere, dopo averne fatti moltiplici sperimenti, la pozzuolana, che ne' monti vicentini abbonda (28), lusingandosi che l'esteso quotidiano bisogno, che n'avea Venezia

---

(23) Gilbert. *Annalen der Physik. Ann.* 1807. *Par. VIII.* ec. Vedi *Nuova scelta d' Opuscoli. Tom. II, pag.* 164.

(24) Le Memorie del Sig. Ab. *Fortis* inserite negli Atti dell'Accad. di Padova, sono = *Intorno le isole Elettridi degli Antichi. Tom. I. Sopra lo stato attuale della Valle, Lago, e Mofeta d'Anfanto. Tom. II. Osserv. sulle Isole di Ventottene e Ponza.* T. III, P. I.

(25) *Sermone parenetico di Pietro Sclamer Chersino al Sig. Giovanni Lovrich. Modena* 1777 *in* 4° — *L'Ab.* Fortis *al Sig. Gio: Lovrich. Brescia* 1777.

(26) Vedi *Opusc. scelti. Tom. XVI, pagg.* 196, 356.

(27) *Tre Lettere al Sig. Co.* Niccolò Da Rio, *sopra le sei risposte del P. D.* Basilio Terzi. *Cesena* 1791.

(28) Vedi *Opusc. scelti. Tom. VI, pag.* 334. Nota.

per sè e lungo tutta la Laguna, facesse sentire l'immenso vantaggio che aver poteasi traendola da' proprj e non lontani monti, anzicchè comperarla da rimoto e straniero paese; ma l'evidenza stessa non valse a persuadere chi le cose allora reggeva, e la spesa, non isvantaggiosa per tutti, diceva egli, continuò sul piede primiero.

XXII. Veduto pur avea trascurarsi, malgrado i suoi avvisi, il Litantrace di Sogliano presso il Rubicone, di cui dato aveva un esteso e ben ragionato ragguaglio (29), e vedeva abbandonarsi quello de' monti veronesi e vicentini, e disprezzarsi le indicazioni *pennetiche*, che per le recenti e più esatte ricerche, oggi trovansi verificate (30) e chiudersi persino gli occhi sui filoni grandiosi che Natura ivi offre spontanea; ma si lusingò almeno che sarebbe stato gradito e non inutile un dono ch'egli fece all'Accademia, e per essa ai concittadini suoi, di quaranta campi di una eccellente Torbiera appartenente a lui per materno retaggio; e perchè il dono riuscisse più utile accompagnollo con un'operetta, in cui dopo avere esposti i vantaggi che la torba può e deve recare nella sempre crescente scarsezza del combustibile, i migliori e più semplici metodi insegna per usarne nella più utile e più comoda maniera (31). Ma che? Qual siane la cagione nol cerco. So che i quaranta campi all'Accademia appartengono, e so ch'egli non vide mai trarsene una gleba di torba, nè si trae sinora.

XXIII. Determinatosi a menar vita campestre, ora nel suo Galzignano viveva in mezzo agli Euganei, ora nel suo Arzignano fra i Berici. Pensiere gli venne più volte d'ordinare i molti suoi scritti non pubblicati, e le note importanti che andava facendo nelle sue peregrinazioni, onde formarne un libro, che servisse di *Guida al Viaggiatore Naturalista in Italia;* ma in nuove cose sempre distratto mai non l'eseguì; e gli scritti suoi, non so come, perirono: e forse died'egli stesso alle fiamme ne'tempi infelici delle perquisizioni politiche e de' sospetti; come abbruciò molte poesie eleganti, dettate or dalla tenerezza, or dallo sdegno, ch'egli compor soleva quasi in ogni

(29) *Opusc. scelti Tom. XIII, pag.* 129.
(30) *Dell' Elettrometria sotterranea. Parte II, Cap.* XIII.
(31) *Della Torba che trovasi appiè de' colli Euganei, dell' Ab.* Alberto Fortis. *Venezia presso Palese* 1795.

ogni luogo de' suoi variati soggiorni: essendo per ciò non solo in frequente corrispondenza coi gran poeti che vanta il secolo; ma pur talora alternando l'improvviso canto colle celebri verseggiatrici estemporanee *Corilla*, *Doralice*, e *Amarilli* (32).

XXIV. A Galzignano piaceagli occuparsi dell'Agricoltura; e a ciò fare, ogni altro studio e rapporto letterario lasciando da parte, allor vieppiù s'indusse, dacchè, ai primi scoppii della rivoluzione francese, gli occhi de' gelosi e timidi governi si erano rivolti su quelli, che co' Letterati della nazione allora tumultuante aveano epistolare commercio, fra i quali era il nostro Fortis. Ma pare che il suo destino dappertutto a contrariare ogni suo progetto l'inseguisse. Uomo di gran nome e potenza, ma non ugualmente ricco di virtù e di sapere, gli rendè mal sicuro il soggiorno di Galzignano, onde non vedendosi abbastanza difeso dalle leggi e da' magistrati d'una repubblica, che declinava al suo termine, vendè i beni che colà possedeva; e per evitare gli ostacoli che opporre potea la vecchia legislazione al libero uso della sua proprietà, trasportò la maggior parte del suo avere in Francia. Colà andò pur egli quando seppe che l'EROE, ora domatore e signore di poco meno che intera l'Europa, era dall'Appennino disceso ad occupare la valle del Po; e non tardò ad udire che un fallimento gli avea rapito in un istante quello da cui avea calcolato di trarre comodo sostentamento.

XXV. Non s'avvilisce egli però, e ricorre alla sua penna. Egli è in tal occasione che scrisse in lingua francese e pubblicò due volumi di Memorie relative alla storia naturale d'Italia (33). Io gli son grato che alcune lettere mie abbia accoppiate alle sue onde forse col suo sopravvivrà a me il mio nome. Egli fa ammirare in quest'opera l'estensione e la profondità delle moltiplici sue ricerche, e la finezza del suo ingegno nel ravvicinare gli oggetti lontani di luogo e di tempo, e indovinare così per quali mezzi e a quali usi operò la Na-

(32) Molte sue poesie fuggitive, oltre quelle che sono inserite ne' mentovati Giornali, trovansi stampate nelle Raccolte, e alcune in fogli o libretti separati. Queste, che sono per lo più poesie amorose o satire, non portano il suo nome.

(33) *Mémoires pour servir à l'histoire naturelle, et principalement à l'orycto-graphie de l'Italie etc. Paris chez Fuchs* in 8° Vol. 2 fig.

tura la formazione delle catene de' monti, come quella delle conchiglie microscopiche che in essi sono. Le sue ricerche sulle discoliti mostrano non solo l'osservatore diligente, e l'ingegnoso indagatore dell'origine di quelle lenti petrose, ma al tempo stesso l'uomo erudito e cauto, che pria di mettersi nel sentiere delle congetture, esamina le orme di que' tutti, che prima di lui lo calcarono (34). Così le sue osservazioni sulla geologia de' monti vicentini fanno conoscere l'uomo che avendo percorsi molti paesi, ha saputo vederne i rapporti, e scorgere le forze varie, che ne hanno prodotta ove la regolarità, ove lo sconvolgimento. Fuvvi, il so, in questi ultimi tempi chi, stando in Francia (35), accusollo d'inesattezza nell'osservare e nel dedurne conseguenze geologiche; ma so ben anche che se FORTIS vivesse ancora, accusato non si sarebbe, o nol sarebbelo impunemente su oggetti che tanto avea studiati e sempre avea sotto gli occhi. Ma se taluno il riprese, cento ve n'ha che le ricerche sue mineralogiche ammirarono, e commendarono.

XXVI. Quest'opera lo fe più da vicino conoscere a chi reggea la somma delle cose in Parigi, e a chi della direzione degli studj colà occupavasi: e poichè la Biblioteca dell'Istituto delle Scienze in Bologna, grandemente accresciuta per la soppressione di ricchi monisteri e conventi, avea bisogno d'un Prefetto che all'estensione delle cognizioni congiungesse l'integrità, e l'attività, fu a ragione creduto non esservi uomo più di FORTIS atto a tal uopo, e vi fu egli con sovrano decreto destinato. Fu allora per l'avanzamento delle scienze in Italia, cangiata in *Istituto Nazionale Italiano* quella Società ch'era dianzi Istituto Bolognese; e FORTIS fu uno de' primi che v'ebbero luogo per la scelta che ne fece NAPOLEONE IL GRANDE. A questo Istituto convenia dare un Segretario. Volle l'Eroe che lo eleggessero i Membri stessi colà adunati, e FORTIS quasi ad unanimi voti fu scelto, poichè si credè non esservi uomo, che per l'eleganza e precisione nello scrivere, per l'attività, per la prontezza, per l'estensione de' lumi, e

(34) Vedasene l'estratto negli *Opuscoli scelti*. *Vol. XXII*, *pag.* 145.

(35) Desmarets, *Mémoires de l'Instit. Nation. Physique et Matemat. Vol. VI*, *pag.* 256.

per altre favorevoli circostanze lo pareggiasse; nè s'ingannarono nella scelta.

XXVII. Il doppio, quanto onorevole tanto faticoso, impiego lo ritenne bensì dalle usate peregrinazioni, alle quali pur opponeasi la fievolezza sua prodotta meno dagli anni che da sofferti mali; ma nol tolse interamente a' suoi studj e alla gloria della nostra Società Italiana, che il gran NAPOLEONE, conoscendo i vantaggi che apporta, avea singolarmente favorita e beneficata. Nei cangiamenti di soggiorno Fortis, non potendo somministrare ai volumi che andavansi pubblicando quella parte di contributo che le Costituzioni esigono dai XL *Socj Attuali* ond'è composta, erasi collocato nel ruolo degli Emeriti; ma, ristabilitosi in Italia, chiese ed ottenne di rientrare ne' primieri diritti e doveri; e ci diede pel volume X una Memoria *Sopra le pretese ossa d' animali terrestri silicee trovate nel Mont-perdu de' Pirenei*, nella quale avverte con urbana e gentil maniera un Naturalista dell'abbaglio preso, dando per ossa selcificate di tetrapodoliti, le concrezioni stalattitiche, o 'l lavoro di vermi marini (36).

XXVIII. Fu questa l'ultima sua letteraria produzione. Sentì che le forze gli mancavano, e nell'interno suo macchinismo comprese esservi qualche cosa che ne ritardava le operazioni vitali; ma vedea con coraggio venir la morte come inevitabil male; e con coraggio, a tutti adempiendo i doveri che la Religione imponevagli, sentì la mano che per l'ultima volta gli opprimeva il petto, e spirò.

XXIX. Egli non aveva eredi datigli dalla natura, e beneficò le persone, che, seco lui da lunghi anni vivendo, aveano mostrato per lui anche ne' disagi un attaccamento sincero. Di parte de' suoi beni già disposto avea per quella persona che dalla Morlacchia seguito avealo in Italia; e volle che il resto avesse quella ingegnosa donna, che di molto sollievo e vantaggio eragli stata in Parigi (37) disegnando per lui con inimitabile esattezza, e intagliando poi in rame con un'arte e una verità mirabile i più difficili oggetti anche microscopici ch'egli prendeva ad esaminare. Pressochè tutte di lei lavoro sono le Tavole che accompagnano le sue *Memorie sulla Storia*

(36) *Memorie della Società Italiana. Tomo X, Parte I, pag.* 172.
(37) La Sig. Sofia Sellier.

Naturale d'Italia. Volle pure, dopo la di lui morte, ergergli, dirò così, un monumento dell'amicizia e riconoscenza sua, incidendone, perchè venisse premesso a quest'elogio, con tutta la finezza dell'arte il ritratto, che disegnato già aveva a lui somigliantissimo negli ultimi anni del viver suo.

XXX. Ella vi presenta il suo volto qual era; io mi studiai di mostrarvi in lui l'uomo erudito, il valente poeta, l'elegante scrittore, l'indagatore ingegnoso della natura, lo spirito vivace, e 'l cor benefico. Vero è che talora, troppo facile allo sdegno come all'amore, non ben calcolò le proprie circostanze, ma è vero altresì ch'egli seppe sovente frenarsi, e talor anche beneficare i suoi nimici; e mostrossi in ogn'incontro generoso e benefico, e talora ancor più di quello che'l consentissero le sue circostanze.

ANNALI

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

Dal Gennajo MDCCCVII *al Marzo* MDCCCIX

CONTINUATI DAL SIG. OTTAVIO CAGNOLI

PROSEGRETARIO DELLA MEDESIMA.

124. La Compagnia avea perduto nella schiera degli Attuali per passaggio in quella degli Emeriti li Signori *Saverio Poli* e *Luigi Brugnatelli*, perciò coi metodi consueti furono da essa eletti li Signori Cav. *Vincenzo Dandolo* e *Pietro Rubini*. Ciò che fu a loro ed ai Socj notificato con circolare del Vicesegretario *Lombardi*, nell'atto che inviava ad essi il Tomo XIII delle Memorie.

125. In questa occasione il Presidente fece consapevoli i Soci di qualche lieve e necessario cambiamento, ch'essi avrebbero riscontrato nello Statuto premesso al medesimo Tomo, e ne indicò le cause; non che dichiarò aver creduto interessante e giovevole ai possessori della crescente collezione degli Atti Sociali far compilare da me suo Segretario particolare un Indice alfabetico ragionato di tutte le varie materie trattate nei primi dieci volumi della Società, con affiggervi il nome dell' Autore, e li numeri del Tomo e della pagina, affinchè fosse vieppiù facilitato lo smercio dell'Opera, e i Coltivatori delle scienze fisiche e matematiche avessero meno ostacoli da affrontare per soddisfare alle saggie loro curiosità: inoltre espose il suo parere di dar la continuazione di tal indice ad ogni dieci Tomi avvenire, insieme colla ristampa del presente e dei successivi.

126. L'Accademia Imperiale delle Scienze in Torino, che avea già mandato i suoi Atti alla Società, ricevè il contraccambio dei nostri, e ne mostrò la sua gratitudine in lettera concepita con termini lusinghieri e ben degni d'entrambi le Accademie.

127. Solo ai 29 d'Agosto, a motivo del giro delle Memo-

rie a sei Giudici, potè il Sig. Presidente assistito dal Socio attuale Sig. *Paolo Ruffini* e dai due Segretarj, riconoscere in Modena l'esito del programma primo Luglio 1805, di cui parla il N.° 121. I tre Giudici di Matematica furono di unanime parere d'accordar l'onore della stampa all'unica Memoria di tal facoltà giunta al concorso, e per le tre Memorie di Fisica, nessuna per il disposto dall'art. 24 Statutario potè meritare nè il premio, nè quel fregio. I viglietti suggellati, che scortavano tali Memorie, furon dati tosto alle fiamme alla presenza dei soprannominati. Aperta poi la scheda accompagnante la Memoria, che riportò il giudizio della stampa, fu rinvenuto Autore di essa l'egregio Socio Sig. *Giuseppe Venturoli* Professore di Matematica applicata nella R. Università di Bologna.

128. Immantinente venne informato il Publico, non che i Socj, del giudizio nato in onore del mentovato loro Collega, esprimendo, che a solo motivo della mancanza delle sperienze domandate nel Programma, la Società provava il rammarico di non poter compensare le di lui benemerite e dotte fatiche col promesso premio di zecchini novanta; facendo bensì dar mano immediatamente all'edizione del pregevolissimo suo lavoro, che ridondava a gloria di lui, della Società, e della intera Penisola.

129. Il Vicesegretario Sig. *Lombardi* che avea sostenuto per sei anni e mezzo le sue incombenze con singolar diligenza e zelo, fu in questo punto, che cessò dall'esercizio delle medesime, a cagion del ritorno novello della sede Sociale in Verona seguitando il Presidente. Questi dalla munificenza Vicereale avendo ottenuto la giubbilazione dalla Cattedra, esercitata per anni nove nella R. Scuola Militare di Modena, elesse terminare i suoi giorni nel seno della propria famiglia e della Patria. Egli si compiacque soddisfar finalmente per tal modo agl'impulsi del proprio cuore, manifestati evidentemente quando richiese al Governo, ma invano, il trasporto della sede in Verona (*Annali* 26). Era stato già determinato dai Socj, rispondendo all'enciclica 22 Marzo 1803 (58), che la sede della Società, in vigor di voti 18 fosse nel luogo, ove dimori il Presidente, e in forza di voti 3 fosse in Verona, rimanendo senza significato, in questo caso, gli 11. voti che la volevano in Modena, e li 2 che in Milano. Si unì pertanto

la pluralità assoluta con la relativa a decidere fin d'allora in favor di Verona.

130. Prima cura del Sig. Presidente Cav. *Cagnoli* fu quella di offrire la Segreteria della Società al Sig. *Benedetto Del Bene*, che l'avea sostenuta altra volta per un anno circa con quelle condizioni che leggonsi al N.° 25, ma che adesso non furono da lui accettate. Il Presidente ebbe la sorte di trovar condiscendenza nell'Ab. *Giambattista Lavarini*, Provveditore Eletto del Liceo; se non che immatura ed invida morte lo tolse in meno d'un mese alla Società, alla Patria, ed alle Lettere.

131. Non volendo il Sig. Presidente passare alla nomina del Vicesegretario Amministratore, se prima non fosse eletto il Segretario, parendogli conveniente indagare anche il contentamento di questo, non ebbe sul momento altra risorsa che quella di affidare provvisoriamente ambedue le incombenze col titolo di Prosegretario della Società al Segretario particolare, che gli era stato accordato (59), ottenendo così risparmio alla Cassa Sociale, e valendosi di Persona, cui non erano nuovi gli usi e le regole del Corpo.

132. Non essendo riuscito al Sig. Presidente di rinvenire in Verona una Stamperia fornita del necessario alla stampa de' nostri Tomi, massime nella parte de' simboli algebraici, fu costretto ordinare a Parma il getto d'un carattere completo; considerando che la spesa non era se non presentanea, giacchè si ricupera co' risparmj successivi delle contribuzioni, che le Stamperie sogliono esigere ad ogni foglio per cagion del consumo del carattere. Appena giunto questo capitale, si potè dar principio all'impressione del Tomo XIV.

133. Per l'accaduta morte in Ferrara del Sig. *Gianfrancesco Malfatti* due vacanze ebber luogo nella Società, d'un Membro cioè, e d'un Pensionario anziano. Il Sig. Presidente invitò per la prima i Colleghi a sceglier un Matematico dai 16, che Loro proponeva, e per la seconda furono richiesti i documenti della nascita ai Signori *Bonati*, *Canterzani*, *Cesaris*, *Paoli*, *Slop*, essendochè in nessuno d'essi v'era disparità nell'età Accademica.

134. Presentò inoltre due quesiti alla maturità dei Socj: cioè se dovesse esser portata a quattro anni invece di tre, l'alternativa di cader negli Emeriti, a tenor dell'art. 5 dello Sta-

tuto, attesa l'operosità sempre maggiore del Corpo nella promulgazione dei proprj Atti: e qual riparo verrebbe creduto conveniente alla soverchia moltiplicità, e non di rado poca importanza delle Memorie *presentate*.

135. Nel decimosesto giorno del 1808 li voti dei Membri della Società elessero in surrogazione del defunto *Malfatti* il Sig. Cav. *Vincenzo Brunacci*, Professor di Matematiche sublimi nella R. Università di Pavia: concorse la pluralità loro assoluta a tramutar i tre anni in quattro per l'alternativa di passar dalla schiera degli Attuali in quella degli Emeriti; e la pluralità relativa volle che nulla s'innovasse circa le Memorie *presentate*, giacchè molti della Compagnia trovarono maggiori danni introducendo variazioni in tal articolo, quando l'origine di esso in ultima analisi deve riconoscersi da amor Patrio, affinchè cioè tutti gl'Italiani, sebbene non Socj, possano contribuire ad illustrare il nome Italiano, e far conoscere insieme il proprio merito per la loro adozione nella Società.

136. Mancato di vita il celeberrimo Socio straniero *Lalande*, gli fu colle solite formalità sostituito il Sig. *Olbers* Astronomo rinomato di Brema; ed Esso pure come gli altri sommi Uomini, di cui fanno testimonianza gli art. 69, 46, 45, 42, mostrò il maggior gradimento per tale elezione.

137. Dall'ispezione dei documenti pervenuti alla Società nel tempo prefisso emerse, che la Pensione di *Anziano* spettava per maggiorità d'anni al Sig. Cav. *Teodoro Bonati*.

138. Fu in quest'occasione, che si resero consapevoli i Socj, qualmente 25 di essi aveano meritata la compensazione per la spesa delle lettere nell'anno 1807, in adempimento dell'art. 23 dello Statuto; i quali sono i Signori *Amoretti*, *Bonati*, *Bondioli*, *Floriano* e *Marcantonio Caldani*, *Caluso*, *Canterzani*, *Cesaris*, *Chiminello*, *Delanges*, *Fossombroni*, *Giobert*, *Giovene*, *Maironi*, *Malacarne*, *Paoli*, *Pessuti*, *Pezzi*, *Pini*, *Racagni*, *Re*, *Targioni*, *Vassalli*, *Venturoli* e *Zeviani*.

139. Per la morte d'uno dei Cooperatori zelanti il Sig. *Giuseppe Slop de Cademberg*, furono invitati li Socj ad elegger altro Matematico, che ristorasse la Compagnia della perdita sofferta. I Tomi II, III, VI, VIII, X, XII e XIII contengono Memorie interessanti del defunto in soggetti d'Astronomia, e sono una prova molto valida dell'amore instancabile di lui per le Scienze, ed il suo attaccamento al Corpo, cui apparteneva.

140. L'elezione di Socio Attuale, che a gran pluralità ebbe luogo per una simil vacanza, procurò alla Società un insigne Soggetto, che oltre alle cognizioni estese di Scienze e di amena letteratura possiede un attaccamento ingenito a ciò che le promove. È desso il Sig. Conte Senatore *Giovanni Paradisi*, insignito di Ordini Imperiali e Reali, ed uno dei luminari del Regno.

141. Il dolore però succede non di rado alla letizia, e ciò infatti accadde per la morte nell'ottavo giorno di Maggio in Verona del celebre Sig. *Giannantonio Zeviani* Protomedico della Città. Esso nelle moltiplici sue Opere mediche, premiate alcune dalle dotte Accademie di Stocolma, di Mantova, e della Società nostra, alla quale fe prezioso dono di curiose Memorie al numero di tredici, ha incessantemente dimostrato la più minuta diligenza d'osservazione, la dottrina e l'erudizione sua somma. Invitati li Membri a nominargli un successore, furono prevenuti, che la pensione di anziano goduta da esso, passava a favore del Sig. Cav. *Canterzani*, superiore d'età naturale ad altri due pari d'età accademica; e il maggior numero de' suffragj ammise nella schiera degli Attuali il Sig. *Stefano Gallini* Professore di Fisiologia e di Anatomia comparata nella R. Università di Padova.

142. Precedentemente il Sig. Cav. Presidente avea scritto all'Amministrazione del Laico Spedale de' Ss. Giacomo e Lazzaro, Erede del fu Cav. *Anton-Mario Lorgna*, onde si compiacesse metter nuovamente in corso il Legato di Ducati duecento d'argento annui, lasciato dal detto *Lorgna* all'Accademia Agraria per servir alla sussistenza perpetua della Società, come si vede al n.° 7 di questi Annali, e non conseguito da questa per diversi anni, finchè la sua sede è rimasta lontana da Verona. La Congregazione di Carità, rappresentante la massa di tutti i Luoghi Pii di questa Comune, tra i quali l'Ospitale suenunciato, determinò ai 10 Maggio, che la Società Italiana era decaduta, pel tempo del distacco, dal diritto di conseguir il detto legato: ma nel caso presente, ch'Ella sia di ritorno in Verona ed adempia le condizioni impostele dal Testatore, rientri essa nel diritto di esigere i duecento Ducati annui d'argento nei tempi e modi già praticati.

143. Prima però dei 28 Giugno, epoca in cui scadeva il pagamento del legato, e perciò il Presidente della Società po-

teva domandare l'esecuzione del disposto dalla Congregazione, credè egli mostrare il suo affetto verso la Patria scrivendo sotto li 21 Maggio al Sig. Cav. *Antonio Carlotti* eletto Presidente dell'Accademia Agraria la seguente lettera

Al Sig. Cav. Antonio Carlotti Presidente dell'Accademia Agraria.
Milano 21 Maggio 1808.

Mi congratulo con l'Accademia per l'elezione dell'ottimo Presidente. Ecco nascere subito in me il desiderio di far cose grate a Lui, all'Accademia, alla Patria; le quali hanno mostrato brama di unione con la Società Italiana. Lorgna la ordinò, ma non diede i mezzi opportuni per effettuarla. L'Accademia stessa conobbe fin dal principio la necessità di contravvenire ai suoi ordini con la Parte 6 Luglio 1796. Essi non possono eseguirsi letteralmente senza ferire gli Statuti della Società, e per conseguenza non può sperarsi il consenso della pluralità de' Socj, se non si trovi un mezzo termine, che salvi tutto. Nel Testamento Lorgna è evidente l'intenzione di unire insieme i due Corpi. Ma come ottener questo intento, se entrambi hanno una sussistenza indipendente un dall'altro; se le loro funzioni sono affatto diverse; se l'uno è circoscritto nel recinto di Verona, l'altro è disperso per tutta l'Italia? Mi è caduto nell'animo un espediente, che metto di buon grado nelle mani di Lei. L'Accademia elegga due de' suoi Membri, i quali la rappresentino nella Società, ed abbiano titolo e prerogative di Membri della Società, in perfetta eguaglianza con quelli che vengono eletti dalla Società medesima. Ecco incorporata per via di rappresentazione l'Accademia con la Società. Ecco aperto l'adito all'elezione successiva e perenne di un Veronese in Presidente della Società, e per questo mezzo alla conservazione della sua sede in Verona. A ciò potranno di tempo in tempo inclinare li Membri della Società, con l'oggetto di mantenerla nel godimento del legato Lorgna, e di risparmiare le spese de' trasporti della sede. Qualora la mia proposizione abbia la sorte di piacere a Lei ed a' suoi Colleghi, bisognerebbe che l'Accademia mi autorizzasse a portarla alla sanzione de' Membri della Società: e se la pluralità di questi l'accettasse, sarebbero pienamente felici le intenzioni che mi hanno inspirato. L'Accademia basta che adotti la massima: l'elezione poi dei due Soggetti sarà da farsi, dopo che la Società abbia accettata la proposizione; su di che non posso impegnarmi, se non di procurare con tutto il calore. Ho l'onore ec.

144. Il Sig. Presidente *Carlotti* rispose del tenor che segue

Veneratissimo Signor Cavalier Presidente.

2 Giugno 1808 *Verona.*

Il primo giorno della mia Presidenza ordinai per il secondo giorno un invito del Consiglio di Reggenza al quale comunicai la lettera ch' Ella si compiacque scrivermi nel 21 *Maggio. Dolcissima a tutti i Membri fu la speranza di vedere riunita la Società Italiana coll' Accademia; ma nacquero alcuni dubbj intorno al modo. Potrebbe l' Accademia senza una specie di temerità prender parte d' elegger due suoi Socj i quali con parità di prerogative e di diritti, nella Società Italiana la rappresentassero? Se anche previamente la Società Italiana avesse presa questa massima e la partecipasse all' Accademia perchè fosse approvata e mandata ad effetto coll' elezione dei due Socj, come potrebbe alcuno di questi al caso dell' elezione d' un nuovo Presidente della Società gareggiare coi trent' otto Veterani ed illustri per chiarissimo nome in tutta l' Europa? Questi dubbj che non possono stare nascosti ad alcuno degli Accademici mi disanimano dal proporre in piena adunanza il progetto. Si sono ponderati il Testamento Lorgna, la Parte sei Luglio* 1796, *i Decreti Bonaparte e Pancaldi, e ne emerse un' osservazione che mi fo un dovere di sottoporle come facile a ridursi in pratica, se ha la fortuna di piacerle, essendo certamente il Governo molto inclinato a secondare le brame d' un tanto celebre Soggetto quale ella è da esso riconosciuto. Se due successivi decreti per avere in Lombardia il meglio dell' Italia disgiunsero da quest' Accademia la Società, ben può il Governo presente cessando le ragioni d' allora comandar la riunione. Avvenimento più lieto non potrebbe succedere a Verona ed all' Accademia la quale grata alle patrie premure che ne prendesse l' Illustre Sig. Presidente sarà certamente lontanissima dal frapporre qualunque siasi difficoltà di dettaglio. Nel parteciparle i sentimenti della Reggenza e gli ossequj di tutti i Membri che la compongono, ho l' onore di protestarmi con distinto rispetto.*

145. Consideratosi dal Presidente della Società, che le ragioni esposte da quello dell'Accademia non potevano calcolarsi d'una forza dirimente ogni trattativa ulteriore: che l'Accademia era composta di Membri atti a sostenere senza trepidazione la progettata rappresentanza nella Società: e che impetrare un Decreto Sovrano sembrava inopportuno dopo quello

già nato (53); il Presidente della Società introdusse verbali trattative col Presidente dell'Agraria, che le comunicava ai Signori Reggenti di lui Colleghi, mercè le quali fu convenuto, che il Cav. *Cagnoli* facesse egli il primo la proposizione (143) ai suoi Socj, e quando fosse accettata da questi, i Signori Reggenti promettevano i loro buoni ufficj, perchè fosse accolta dall'Accademia con ballottazione onorevole. Quindi il Presidente *Cagnoli* fino dai 24 Giugno interpellò la volontà dei Socj sulla proposizione (143) riflettendo che quell'incorporamento rappresentativo, mentre era onorifico ad ambi i Corpi, niuna variazione portava al modo d'esistere della Società, e d'altra parte dava compimento in quanto è possibile alle intenzioni sempre rispettabili del Cav. *Lorgna*, benefico fondatore della medesima. A grande pluralità fu dai Colleghi accolta la proposizione del Sig. Presidente, ed Egli non tardò a comunicar ciò all'Accademia Agraria pel canale della Reggenza.

146. Alla vacanza ben dolorosa, lasciata nella Compagnia dal benemerito e attivo Socio Sig. Cav. *Pierantonio Bondioli* fu coi metodi Statutarj riparato coll'elezione del Sig. *Valeriano Luigi Brera* Professore e successore al defunto nella R. Università di Padova alla Cattedra di Clinica Medica.

147. Il Sig. Presidente conoscendo che non di rado si rende difficile in Modena l'esazion delle rendite della Società, sicchè spesso fa d'uopo debellare i debitori con atti forensi; e che l'aureo carattere del Sig. *Giambattista Dall'Olio* Modenese Ragionato Demaniale, e la di lui attività e zelo a favor della Compagnia gli ripromettevano felici successi, sperimentati già in altre occasioni; così correndo il giorno tre del milleottocentonove il nominato Sig. Presidente fece Procura legale nella persona del prefato Sig. *Dall'Olio*, abilitandolo per quei passi, che potessero trovarsi necessarj a preservar l'interesse della Società.

148. A senso dell'art. XXIII dello Statuto nel decimoquinto giorno di Gennajo il Presidente e il Prosegretario della Società esaminarono accuratamente l'epistolario Sociale compreso nei limiti da 16 Novembre 1807 a tutto il 1808, e si rinvennero degni della compensazione statuita sedici Membri: cioè li Signori Cav. Ab. *Amoretti*, Cav. *Bonati*, *Floriano Caldani*, Cav. *Canterzani*, Cav. Ab. *Cesaris*, *Delanges*, *Fabbroni*, *Fer-*

roni, Cav. *Fossombroni*, *Giovene*, *Malacarne*, *Pessuti*, *Racagni*, Cav. *Ruffini*, Cav. *Saladini*, *Venturoli*.

149. Spirando col giorno ventitre di Maggio prossimo la sessennale Presidenza del Sig. Cav. *Antonio Cagnoli*, Egli in antecedenza d'un bimestre notificò ai Socj di aver aggregato agli Onorarj, secondo la facoltà, che gl'imparte l'art. VI dello Statuto, li Signori *Paolo Brambilla*, e *Antonio Lombardi*, il primo Professore di Matematica nel R. Liceo di Brera in Milano, il secondo Bibliotecario publico in Modena. D'entrambi accennò i molti servigj prestati alla Società, di maniera che non avrebbe saputo quali altri promovere, che avessero maggiori benemerenze, e che perciò più meritassero questa distinzione.

150. Espresse il prefato Sig. Presidente in questa circostanza la maggior sua riconoscenza verso i Colleghi che aveano voluto onorarlo di tal Presidenza per lo spazio di dodici anni, e li pregò a voler nominare altro Soggetto del loro novero, in fuor di lui già debilitato oltre modo da affezioni nervose alle mani ed alle gambe. Siccome poi la delicatezza sua non gli permetteva, che le Risposte alla di lui enciclica giungessero alla propria direzione, o a quella del Prosegretario suo Nipote, così desiderò che ogni Socio avesse la compiacenza di trasmetter il proprio voto al Membro Onorario della Società il P. *Pompilio Pozzetti* Prefetto della R. Biblioteca e Professore in Bologna, da lui pregato a comunicar le risposte originali all'altro Socio Onorario Sig. *Antonio Lombardi*. Ciascuno d'essi due presidi a questa elezione vorrà nel termine prefisso trasmettere al Prosegretario della Società l'epilogo delle votazioni senza il nome dei votanti al modo solito, perchè esso possa eseguire ciò che gl'incombe successivamente.

151. Avendo la Reggenza dell'Accademia Agraria di Verona risposto alla lettera di partecipazione e di proposta (145) del Presidente della Società, senza consultare il sentimento dell'Accademia stessa, alla quale soltanto spettava il decidere, così il detto Sig. Presidente estese ed inviò ad ogni Accademico dell'Agraria una completa informazione sull'argomento, e tuttora nel giorno ventesimosettimo di Marzo l'Accademia non avendo pronunciato cosa alcuna, si renderà conto di ciò che seguirà, negli Annali del Tomo XV, terminando i presenti colla publicazione del quattordicesimo.

Essendo occorso alla pagina 244 *della* 1.ª *Parte del Tomo XIII della Società Italiana delle Scienze un notabile errore non riscontrato che dopo la pubblicazione di esso Tomo, se ne offre la correzione.*

Err. p. 244, lin. 24. *Chiamata m* ec. fino a *Queste uguali* ec. *Corr.* Chiamata m la massa di una di esse palle, v la velocità acquistata nella discesa, s lo spazio ch'essa percorre introducendosi nella materia molle; come pure chiamata M la massa dell'altra palla, U la velocità nel discendere acquistata, S lo spazio da essa percorso nella medesima materia: e parimenti chiamate u e V le rispettive velocità residue ai corpi dopo di aver percorso nella materia gli spazj s ed S, si avrà per la prima $\phi u \partial s = -mu\partial u$; e per l'altra $\phi V \partial S = -MV\partial V$: perciò fatte le integrazioni sarà (*V. Mem. cit.*) $f\phi u\partial s = mv^2$, e $f\phi V\partial S = MU^2$. Ma le masse essendo, come si è posto, in ragione reciproca dei quadrati delle velocità rispettive, si ha $mv^2 = MU^2$. Dunque altresì $f\phi u\partial s = f\phi V\partial S$.

ERRORI CONTENUTI NEL PRESENTE TOMO.

PARTE MATEMATICA

Pagina	Linea	Errori	Correzioni
38	15	sui i	sui
105	penul.	perchè	purchè
141	6	r^2	x^2
160	2	asta e canna	asta o canna
166	3	con braccio	un braccio
168	10	retta resta	retta, resta
195	2	ove	ovvero

PARTE FISICA.

Pagina	Linea	Errori	Correzioni
6	8	per dir così	*si cancelli*
10	24	della lamina	*si cancelli*
30	9	. Modificazioni	; modificazioni
44	8	*de' giri.*	*de' giri;* se il N. A. qui non volesse che intendessimo *sulla stessa sostanza considerata nella vòlta de' ventricoli, essendo capovolto il cervello:* ma non lo dice.
49	27	può	possa
57	1	de' lobi	da' lobi
84	10	. Quindi	, quindi
88	2	*rayonaée*	*rayonnée*
93	32	Geoffroy, poter	Geoffroy non poter
97	27	unita resina	unita alla resina
109	33	amautosi	amaurosi
119	19	andirivieri	andirivieni
120	23	uno, più	uno o più
121	25	si	ci
125	11	cammino	cammino.
127	penul.	*quarum*	*quorum*
	ult.	Sal. 103	Psal. 103.

Pagina	Linea	Errori	Correzioni
147	31	*Trece*	*Tréw*
157	33	spigelio	Spigelio
160	16	*nulla*	*nullam*
166	34	intenzione	intensione
175	21	non	non solo
181	31	*Epingetis*	*Epynictis*
	38	parte	perchè
183	6	idiosinerasia	idiosincrasia
188	29	*Rariarum*	*Rararum*
204	32	*craepitum*	*crepitum*
213	18	54)	54):
214	12	di calce	di ferro
221	12	circostanze nè si	circostanze, perchè nè si
244	21	Alias fontana	alias Fontana
248	29	Qualunque	Quantunque
257	2	*a linea*	*si cancelli*
283	15	lui	lei
284	11	*costant*	*constant*
	36	spiegato	spiegata
313	19	confermato	conformato

MEMORIE
DI
MATEMATICA

DELL'ANNUA PARALLASSE DI α DELLA CAPRA

MEMORIA

Del Signor Ab. Vincenzio Chiminello

Ricevuta li 28 *Aprile* 1807.

Da molto tempo più non si ricercava di parallasse delle Stelle Fisse, e dagli Astronomi abbandonata, e quasi dispregiata pareva, che non fosse per richiamarsi a nuove osservazioni dopo tanti inutili tentativi per iscoprirla. Ma pure i celeberrimi Astronomi Piazzi, e Calandrelli confidando l'uno nella perfezione del suo Circolo Rasdemniano di piedi sei, l'altro nella grandezza del suo Settore di piedi nove adoperato dal Boscovich, si lusingarono di riuscirvi. In fatti avendo il Piazzi nell'anno 1802 insieme raccolto le proprie Osservazioni delle Stelle per il suo nuovo Catalogo, e rimarcando nella Lira delle differenze in declinazione indicanti una Parallasse, e quindi avendo in seguito e la medesima fissa osservato, ed alcune altre delle principali, gli parve scoprire, e pubblicò (Tomo XII della Società nostra) una Parallasse di 1″,5 in Aldebaran, di 1″,0 nella Capra, 4 in Sirio, 3 in Procione, 2 forse in Arturo, e così 2 nella Lira. Il Calandrelli poi nel 1805, com'espose in una Epistola all'Eminentissimo Litta, ed in un Volume di Opuscoli al Regnante Pio VII, trovò nella declinazione della Lira con una prova la Parallasse di 4″,7, e con altra più esattamente 3″,9, nè pur di un secondo minore. Mosso pertanto da questi esempj, e dall'eccitamento degli Astronomi Francesi

(*Connoissance des Temps* Anno XIV) volli pur io provare con questo della Specola di Padova eccellente Quadrante Murale di Ramsden d'otto piedi di Raggio, se qualche indicio di Parallasse vi sia nella declinazione della Capra, stella che qui passa quasi per il Zenit, e però non soggetta a Rifrazione. La osservai otto volte in Luglio 1806, ed otto in Gennajo di questo anno 1807, ed ebbi quell'attenzione, ed avvertenza, che si richiede in sottili osservazioni di questa sorta.

La distanza dal vertice media dalle Osservazioni di Luglio risultò, come si vede nella Tabella qui sotto 0° 23' 48",75 verso Borea, quella dalle Osservazioni di Gennajo 0° 23' 59",69, e pare un effetto contrario alla Parallasse; ma l'Aberrazione, e la Nutazione applicando alla prima risulta ella 0° 23' 53",02, e di più alla seconda la parte proporzionale applicando di annua variazione, e di moto proprio risulta 0° 23' 50",81, onde apparisce che abbia la Capra una parallasse poco differente da quella, che ritrovò il celeberrimo Piazzi. Avverto, che l'aberrazione conclusi per le formule del Sig. De Lambre, la nutazione per le Tavole del fu chiarissimo Lambert; l'annua mezza variazione, e l'annuo mezzo moto proprio d'applicarsi alla distanza media di Gennajo presi dall'esatte Tavole del ch. Triesnecker.

DISTANZE DELLA CAPRA DAL ZENIT.

1806. 3 Luglio	0° 23' 46"	1807. 5 Gennajo	0° 23' 59",5
4	50	6	60,0
7	51	7	60,0
8	50	8	58,5
9	49	9	58,0
14	49	10	59,0
15	47	11	58,0
16	48	12	57,0
Distanza media	0° 23' 48",75	Distanza media	0° 23' 59",69
Aberrazione additiva .	+ 5,54	Aberrazione sottrattiva	— 5,63
Nutazione sottrattiva .	— 1,27	Nutazione additiva . .	+ 0,19
Distanza corretta . . .	0° 23' 53",02	Distanza corretta	0 23 53,25
Distanza ridotta	0° 23' 50",81	Variazione di 6 mesi sottr.	— 2,64
		Moto propr. di 6 mesi add.	+ 0,20
Differ. di Declinaz. . .	— 2,21	Distanza ridotta	0° 23' 50",81 ;

e 1",10 ½ sarebbe l'indicazione di Parallasse nella declinazione della Capra.

Io peraltro, benchè il risultato delle mie osservazioni quasi si accordi con quello delle osservazioni Palermitane, non sosterrò come abbastanza comprovata la parallasse della Capra. Troppe sono le cause turbanti, per le quali se ne può ancora dubitare. Sono queste il non sempre costante giudizio dell'occhio nello stimare il vero contatto della Fissa al Filo Orizzontale del Tubo, il non sempre uniforme movimento della Coclea girante il Micrometro, il tremore dell'aria proveniente dall'agitazione dei venti sebbene piccoli, la sua purità, o impurità che fa meno, o più radiante la Fissa, la maggiore, o minore chiarezza della luce che diversifica la grandezza del filo oculare orizzontale, la espansione, o contrazione del lembo del Murale, del Circolo, o del Settore prodotto dal calore, e dal freddo, onde gli intervalli della divisione del lembo stesso vengono qualche poco accresciuti, o diminuiti, e finalmente il filo a piombo alle volte aberrante, sebbene all'occhio armato esattamente ridotto comparisca. Queste, e forse altre difficoltà sembra, che abbia avuto in mente il chiarissimo Astronomo de Cesaris, quando scrisse le sue riflessioni sulla Parallasse delle Stelle, che inserì nell'Effemeride di questo anno. Non sarà dunque, che per lunga, e lunga serie di Osservazioni o col mezzo di stromenti di assai più gran raggio, che la Parallasse delle Stelle si possa verificare.

SOPRA SEI ARCHI-BALENI CONTEMPORANEI E CONCENTRICI.

MEMORIA

Del Sig. Abate Vincenzio Chiminello.

Ricevuta li 28 *Aprile* 1807.

Quel sì vago dilettevole fenomeno tra le nubi pioventi a sole lucente dall'opposta parte, divinizzato dagli Antichi Poeti *Nuntia Junonis varios induta colores*, l'Iride Celeste, il più delle volte, come vedesi, comparisce in due Archi concentrici terminanti all'Orizzonte con inversione di colori tra l'uno, e l'altro, ed oggi non più come un tempo, eccita la curiosità, e lo stupore del Popolo, e molto meno a sè chiama l'attenzione dei Dotti; ma qualora comparve moltiplicato o direttamente, o in opposizione di figura fu sempre dai Fisici notato, e considerato, ed ancora, se tal si mostri, può meritare la loro considerazione. L'Allejo nel 1698 vide e notò tre Archi-Baleni, dei quali il terzo era colla stessa disposizione di colori come nel primo (*Enciclopedia d'Iverdon*), ed io stesso mi ricordo di averne una volta veduto tre; Vitellione in Padova ne vide quattro concentrici (ibidem) de' quali però due a rovescio dei primarj, e distaccati; ed a rovescio ancora quattro così disposti mi disse averne veduto, non molti anni sono, il fu Eminentissimo Borgia Porporato dottissimo di chiaro nome, ed io diedi la relazione di due Archi osservati nel 1798 rovesciati sopra i due primarj, dei quali l'esterno superiore era in contatto coll'esterno inferiore; e finalmente il Sig. Ab. Francesco Bertirossi-Busata vide da uno dei Colli Marosticensi, cosa forse non più osservata, sei belle Iridi concentriche chiare, e ben distinte l'una dall'altra, delle quali me ne diede la relazione in questi termini.

20 *Agosto* 1805. *Alle ore* 4 ½ *pomeridiane, essendo il cielo quasi affatto sereno dalla parte d'Ostro, si alzò verso Maestro una nuvola nera, e minacciosa la qual diede poche goccie, e radendo le Montagne passò celermente a Levante oltre Bassano la-*

sciando da dove partì quasi del tutto sgombro il cielo, deposte solo picciole strisce, come code che la seguivano. Comparve all' improvviso il Sole, e videsi tosto sugli avanzi della nube alla parte di Levante un bellissimo Arco-Baleno, poscia in pochi istanti successivamente un secondo, un terzo, un quarto, un quinto Arco ben distinti, ed indi finalmente ne comparì un sesto largo tre in quattro pollici, di modo che con tutti questi Archi la nube rassomigliava molto bene ad una volta composta di soli Archi-Baleni. La parte visibile di questa luminosa Volta, che sembrava stendersi dalle Montagne di Canal di Brenta sino sopra Bassano compariva in lunghezza, o latitudine di gradi 45 *circa, l' elevazione sopra l' Orizzonte dell' esterno Arco maggiore era* 28 *in* 30 *gradi, la sua larghezza, o grossezza più che doppia di quella del secondo, la larghezza del terzo minore di quella del secondo, e più debole la sua luminosa apparenza, e così successivamente degli altri Archi, tra' quali tutti comparivano le distanze quasi affatto uguali di circa due palmi. La nube alla quale attaccata pareva la Volta luminosa dei sei Archi, era, come dissi, nera, e grossissima, e durò il Fenomeno mezzo quarto d' ora, circa.* Così l' attento Relatore.

Il fenomeno dunque dell'Iride Celeste merita ancora l'attenzione, e studio dei Filosofi, qualora in nuove forme comparisca, nè delle sopraccennate fu trascurato di darne le ragionevoli spiegazioni. Le tre Iridi spiegansi per mezzo di una terza riflessione dei raggi Solari nelle goccie di pioggia dopo le due riflessioni, e rifrazioni, colle quali si forma la doppia Iride superiore solita a vedersi (Musschembroek): delle quattro Iridi eccentriche opposte, e distaccate due sopra a due, o d'una sola sopra d'una a somiglianza d'Iperbole notano gli Enciclopedisti (Enciclopedia d'Iverdon) che se il Sole essendo elevato 41 gradi, e 46 minuti, e li suoi raggi cadano sulla superficie di qualche Lago spazioso, nel di cui mezzo trovisi lo spettatore, e nel tempo medesimo piova, li raggi riflettendosi nelle goccie di pioggia produrranno l'effetto stesso, come se il Sole fosse sotto l'Orizzonte, e li raggi partissero da basso in alto, e però vedrebbesi una, o due Iridi voltate all'insù, mentre per la riflessione diretta dei raggi Solari contro la pioggia vedrebbesi la una, o le due Iridi solite voltate all'ingiù. Delle due Iridi poi opposte superiori a due inferiori solite, delle quali la maggior esterna superiore sia in contatto

colla maggiore esterna inferiore io spiegai questo fenomeno (Tomo X, P. I della Società nostra) coll'esempio d'uno specchio collocato orizzontalmente sopra il vertice di una colonna, o statua, sotto cui trovandosi lo spettatore vede rovesciata la immagine della stessa statua, o colonna, perchè appunto le nubi agghiacciate, o molto vaporose stese orizzontalmente sopra l'osservatore, e sopra le due Iridi devono produrre un effetto simile a quello dello specchio. Ma che diremo dei sei Archi-Baleni osservati ultimamente?

Se vi siano due Parelii nello stesso verticale del Sole, o in verticali vicini, e piova dall'opposta parte, facilmente s'intende, come possano comparire sei Archi-Baleni, formandosene quattro dai raggi riflettuti, e rifratti dei due falsi Soli nelle goccie di pioggia, come se ne formano due dai raggi del vero Sole; ma nel caso nostro non v'erano Parelii, forza è dunque altramente spiegare l'osservato Fenomeno. Or se tre pioggie in quel tempo supponganſi l'una dall'altra separate contro il Sole a tre differenti elevazioni sopra l'Orizzonte, in modo che l'elevazione della pioggia più interna fosse la maggiore, e la minore fosse quella della pioggia esterna, ma insieme che le nubi occultassero parte della pioggia più interiore sopra la pioggia framezzo, e così parte di questa sopra la pioggia esterna, in questa combinazione potevano comparire, come si videro li sei Archi-Baleni appartenendo li due archi più bassi alla pioggia esterna perchè più vicina, e gli altri due a due successivamente più elevati alle pioggie interne. Ma in vero se ciò sembra possibile, egli è però molto difficile, che se anche tre pioggie ci erano, la loro disposizione siasi combinata così bene. Piuttosto adunque soddisfacente parerà quest'altra più naturale spiegazione.

Com'è noto, in Fisica si dimostra, (Musschembroek) che se faciansi tre riflessioni, e due rifrazioni dei raggi Solari nelle goccie di pioggia può comparire una terza Iride, purchè il Cielo di dietro sia non solamente molto nuvoloso, ma nero ad un grado, che non trasmetta punto di luce; e la terza Iride in fatto più volte fu veduta; or dunque per assai più forte densità delle nubi anteriori, e superiori, e forse congelazione, e per certa disposizione delle goccie di pioggia potendosi moltiplicare ancor più la rifrazione, e riflessione dei raggi, perchè non potrà comparire una quarta, e poi quinta, e sesta Iride contemporaneamente corrispondenti a tre prime?

Che poi nel caso del riferito fenomeno tale fosse la combinazione di nube, e dello stato assai vaporoso dell'aria lo s'inferisce dalla Relazione stessa, in cui si nota, che la nube, dalla quale appariva quella Volta di sei Archi-Baleni, era molto nera, e grossissima; e lo s'inferisce dalla qualità di quella giornata molto piovosa nelle ore pomeridiane, essendo caduto anche in Padova un pollice d'acqua, indizio che le nubi erano generalmente assai vaporose sopra l'Orizzonte visibile di questi Paesi. Veramente anche qui provasi qualche resistenza a credere, che la riflessione, e rifrazione dei raggi Solari nelle goccie di pioggia potesse tanto replicarsi; ma se del pari è difficile la suddetta supposta combinazione delle tre pioggie; delle due spiegazioni sembra questa doversi preferire, come analoga precisamente all'apparenza dell'osservato fenomeno negl'interni Archi (si noti) sempre meno luminosi, e più ristretti corrispondentemente alla successiva riflessione, e rifrazione dei raggi naturalmente più debole. Il fatto medesimo sembra comprovarla, nè andrò cercando di più.

DELLA VERA CURVA
DEGLI ARCHI DEL PONTE A S. TRINITA DI FIRENZE.

DISCORSO GEOMETRICO-STORICO

Del Signor Pietro Ferroni.

Ricevuto li 16 *Luglio* 1807.

(*)

Non v'è Toscano nè Forestiere intendente, che non ammiri, e non abbia sempre ammirato il Ponte più bello tra i quattro edificati in diversi tempi sull'Arno, i quali adornano la Capitale del Regno d'Etruria. Contando ordinatamente il numero di questi Ponti a seconda della corrente del Fiume egli è il terzo, e resta poco distante, andando vers' Austro, dalla Chiesa e Badia de' Monaci Valombrosani dedicata alla SS.ma Trinità, da cui prende esso il nome, sebben per antico idiotismo dei Fiorentini pronunciato senza l'accento finale. Sopravvenuta la piena straordinaria, che stando a' molti segni e iscrizioni, le quali trovansi a perpetua memoria in varj Quartieri della Città, chiamossi il Diluvio del 13 di Settembre M.D.LVII, questa Escrescenza d'Arno, oltre ad avere abbattuti i due destri de' cinque archi del Ponte prossimamente inferiore che appellasi *alla Carraja* (fabbricato dapprima nel M.CC.XVIII colla direzione di Jacopo o Lapo maestro d'Arnolfo di Cambio (*a*), quindi dopo la piena del M.CC.LXIX che lo distrusse, rialzato col modello e assistenza dei due Domenicani Architetti del Tempio di S. Maria Novella Frà Ristoro e Frà Sisto, ed allora denominatosi *Ponte Nuovo*), demolì onninamente l'antico

(*) A questo asterisco corrisponde il Disegno datone in picciolo nella Tav. I.

(*a*) Correggasi in ciò „ L'Osservatore „ Fiorentino negli Edifizj della sua Pa- „ tria. Seconda Edizione riordinata e „ compiuta. Tomo quarto. *Vestigia ho-* „ *minis*. Firenze M.DCC.XCVIII. Nella „ Stamperia Pagani e Compagni „ alla pag. 79.

tico di S. Trinita, ch'era il rifatto nel M.CC.LXXIV sulle rovine di quello erettosi nel M.CC.LII per le premure e influenza di Lamberto de' Frescobaldi, e poco mancò (a descrizione del Baldinuzzi sulla fede d'alcuni Annalisti del Secolo XVI) che non rovinassero a un tempo il Ponte *a Rubaconte* o sivvero *alle Grazie*, ch'è il primo di tutti e del M.CC.XXXV, ed il Ponte *Vecchio* già del Secolo XI nell'antica Via Cassia, ma ricostruito nel M.CC.XCIV, atterrato per nuova piena de' 4 Novembre M.CCC.XXXIII, e nel M.CCC.XLV riposto in essere dalla Repubblica Fiorentina col disegno di Taddeo Gaddi e con sessantamila Fiorini d'oro di spesa. L'istesso Gaddi fece anco spendere al Comun di Firenze (e lo attesta il Vasari) altri ventimila Fiorini d'oro per la rifondazione e restauro del prenominato Ponte di S. Trinita, il qual lavoro fu finito nel M.CCC.XLVI, cosicchè aggiungendo lo spesovi con averne affidata, come sopra, l'impresa ai due Frati predetti onde redintegrarlo a motivo dei guasti cagionativi dalla surriferita escrescenza accaduta il 1 Ottobre M.CC.LXIX, si dee dir con ragione che questo Ponte sia quello de' quattro testè citati, ch'abbia inferito per mantenerlo maggiore aggravio alla pubblica economìa dello Stato.

Era di già Bartolommeo Ammannati Battiferri da Settignano riputatissimo in Venezia, Roma, e Firenze, pel suo valore massimamente nell'Architettura Civile. Aveva egli appreso il Disegno sotto lo Scultor celeberrimo Cav. Baccio Bandinelli, e la Scultura ch'è vera scuola delle graziose e nobili proporzioni, ricavate immediatamente dalla Macchina umana, l'aveva imparata nello Studio Veneto di Jacopo del Tatta, allievo d'Andrea Contucci del Monte San Savino, e chiamato perciò Jacopo Sansovino. Fu molto stimato dai quattro Sommi Pontefici Paolo III°, Giulio III°, Gregorio XIII°, e Sisto V°, che di sovente si valsero dei suoi consiglj, specialmente dopo la morte di Michel Angiolo Buonarroti, ch'ei sempre si recò ad esemplare nell'esercizio delle Bell'Arti. Nominato quindi Architetto del Gran Duca Cosimo I° de' Medici, e segnalatosi in diverse Fabbriche d'ottimo gusto e di pari magnificenza, venne prescelto alla riedificazione del Ponte di S. Trinita, principiata nel 1 di Marzo M.D.LXVI, ed ultimata in Primavera del M.D.LXIX. Il Modello che immaginò per la *centina* di ciascun dei tre archi del nuovo Ponte, collo spartimento in tal

modo che quel di mezzo avesse 50 braccia Fiorentine (o sivvero 90 piedi Parigini) di *corda*, ed ognuno dei due laterali 45, fu nuovo ad un tempo ed ardito. Imperciocchè non piacendo a lui gli Archi Saraceni o Moreschi, e molto meno i Gotici o per dir meglio Teutonici (giacchè in Ravenna sotto i Re Goti non si lavoravano altri Archi che *a punto fermo*) come barbari e non mai adoperati ne' Secoli, in cui si mantenne florida l'Architettura, e parendogli di mal garbo e non abbastanza svelti e leggieri gli Archi in porzione di Cerchio praticati nei Ponti pressocchè tutti dagli antichi Romani, nè contentandosi tampoco di ricopiare i soliti *Ovati* che non s'ignorarono dà Roma antica, ed in particolare quantunque volte facea d'uopo segnar la Pianta d'un Anfiteatro o l'Arena d'un Circo, siccome è quella del Colossèo, volle che si combinassero insieme la Regola di far nascere ad angoli retti dalle *impostature* delle Pile i suoi Archi e l'altra di lasciar tanto di vano o di franco al transito delle acque d'Arno in tempo di piena che ogni Arco avesse intorno un settimo di *rigoglio* a paragon della *corda*. Questa nuovità singolare e fin allora non posta in pratica, se non per picciole Volte conformate ad Archi *scemi* di fortissima spinta contro dei *Piè-diritti*, impegnollo a concepire e tracciare una Curva, della quale non eravi esempio avanti di lui. Ma non essendovene restato ricordo, ed i suoi Scritti e Disegni [massime *la Città* (*b*)], parte dei quali per caso venuti in mano del Matematico Vincenzio Viviani furon da esso donati al suo amico e discepolo Luigi Del Riccio Provveditore del Magistrato de' Nove, riputandosi oggi come smarriti, quindi n'è nato che i Geometri ed Ingegneri di maggior credito siansi divisi nel credere quella *centina* ricavata chi dalla *Parabola*, chi dall'*Ovale* o spuria, od Apolloniana.

Difatto se riguardo al Ponte di S. Trinita dovessimo prestar fede ai racconti del Vasari e del Baldinucci (detto dalla nostra *Crusca* il *Lustrato*), dessi tengono per l'*Ovale*, non di-

(*b*) Questo Volume di Piante ed Alzati per edificare regolarmente e con tutti i comodi ed usi pubblici una Città nuova dicesi adesso dopo lungo smarrimento in mano d'un Amatore o Dilettante di tutte l'Arti di finissimo gusto. Milizia asserisce alla pag. 56, citata più sotto nella Nota (*hh*), che tutti i mentovati Disegni passassero dal Senator Del Riccio in possesso del Gran Principe Ferdinando de' Medici, primogenito di Cosimo III.

versamente dal Senatore Gio: Batista Nelli il vecchio, nel suo *Discorso del fabbricarsi i Ponti ne' Fiumi della Toscana* (*c*), e dall' *Antiquario Fiorentino* (*d*), omettendo di far parola del precitato *Osservator Fiorentino*, scrittore dopo di loro, che chiama a torto *restauro* quel capodopera d'Architettura (*e*); ma non sanno poi dire adeguatamente se fosse un *Ovale* descritta mediante i due *fochi*, o quanti *centri* ella avesse, ed in somma con qual principio ed arte speciale l'Ammannati la disegnasse. Fu di parere eziandio l'Ingegnere Bartolommeo Vanni nei suoi *Discorsi Mss. intorno l'Architettura dei Voltami e degli Archi* e *sulle Fabbriche dei Ponti* che gli Archi del Ponte di S. Trinita fosser *composti da varie porzioni di Cerchio*. Non pertanto venn'egli subito contraddetto in ciò virilmente dal Matematico Don Guido Grandi, il quale in alcune Geometrico-Meccaniche *Riflessioni*, che fan comento ai citati *Discorsi*, e si leggono nel Tomo VII (*f*) de' molti Mss. di lui, posseduti oggidì dalla pubblica Librerìa dello Studio di Pisa, pretende che la *Centina* sia *Parabolica*, ed insegna diffusamente il modo facile e particolare di conseguirla per punti, commettendo insieme due tronchi d'un'istessa *Parabola*, preceduto in siffatto divisamento dal De La Hire ch'ei cita. Prevalse cotanto questo pensiere del Grandi, ed ebbe la sorte d'essere sì ben accolto dai dotti che non solamente mostrossi propenso ad acconsentirvi il Matematico Tommaso Perelli [come par che rilevisi dall'*Appendice* del M.DCC.XLIV al *Trattato delle Sezioni Coniche* del medesimo Abate Grandi di lui precettore (*g*)], ma oltrecciò tutti i colti Toscani son dell'istessa opinione; di tal maniera che nella Scuola Fiorentina di Geometria-pratica e Architettura ancor di presente s'insegna agli Alunni delle Belle-Arti il metodo di delinear questa *Centina* per via di *tangenti* ricopiato dai Mss. di Torricelli, e conducente a spiegare la particolar *curvatura* del ridetto Ponte dell'Ammannati.

Non era però difficile durante il periodo già scorso d'intorno a due secoli e mezzo esaminar questo Ponte con diligenza e misurarne debitamente le parti per iscoprire siffatto qualunquesiasi segreto, e sottrarre l'investigazion della Curva da

(*c*) Vedasi alla pagina 43.
(*d*) Ediz. di Firenze del M.DCC.LXXVIII, alla pag. 237.
(*e*) Tomo IV, alla pag. 80.
(*f*) Segnatamente alla pag. 286, e seg.
(*g*) Corollario VI, alla pag. 135.

ogni possibil dubbiezza. Potea forse sospettarsi a ragione che il Disegno di Pianta ed Alzato del medesimo Ponte delineato ed inciso in rame nel M.DCC.LIV dall'abile Architetto Bernardo Sansone Sgrilli, che dedicollo al Principe di Beauvau, ed è compreso tra gli altri della Raccolta delle Fabbriche di Firenze, pubblicata da Ferdinando Ruggieri e da Giuseppe Bouchard in IV Volumi, non fosse, a motivo della ristrettezza della sua *scala* proporzionale di 30 braccia, valevole a rettamente e precisamente indicare la qualità della Curva. Di più era permesso opinare che ferme stanti le principali misure la Curva istessa fosse anco stata dall'Architetto Calcografo disegnata non con imitazione puntuale del vero, ma come suol farsi, secondandone l'andamento prossimamente o *a capriccio*. Ed infatti lo scopo dei Disegnatori e Incisori è quasi sempre quello di copiare in approssimazione le proporzioni e l'ornato d'un Edificio, senza segnarne i più minuti particolari. In conferma di ciò la Tavola di Num.° 78, ch'è l'ultima del Tomo III della seconda Edizione dell'Opera precitata (*h*), a cui mi riporto, rappresentando quel Ponte in Pianta e Prospetto geometrico, non lascia di mostrare in genere tutta la magnificenza ad un tempo, la saldezza, e la maschia di lui venustà, ed in piccolo le *sagome* o *modini* di tutti i suoi adornamenti, coi *cartelloni* che corrispondono alle sei *chiavi* del *brachettone* o *archivolto* o *ghiera* che dir si debba degli Archi, e colle quattro più moderne Statue innalzatevi e collocate al doppio termine della sua *correggiata*, simboleggianti le diverse Stagioni, cioè l'Inverno scolpito da Taddeo Landini, l'Autunno e l'Estate lavoro di Giovanni Landini, e la Primavera del Francavilla Fiammingo. In vedendo nel *cartellone* di mezzo d'amendue le faccie del maggior Arco sopra una testa d'Ariete il bassorilievo del Segno o Costellazione zodiacale del *Capricorno*, si rammentano molti che il Duca Cosimo la scegliesse per propria Impresa, Emblema, o Divisa, renduta quindi da lui stesso comune all'

(*h*) *Scelta di Architetture antiche e moderne della Città di Firenze ec. Tomo terzo, nel quale si contengono gli ornamenti di Porte e Finestre, colle Misure, Modini, e Profili, tratte da alcune Fabbriche insigni di Firenze, erette col disegno de' più celebri Architetti. In Firenze l'Anno* M.DCC.LV. *Appresso l'Editore (Bouchard)* (in gran foglio). Ivi *Catalogo degli Architetti e delle Opere loro ec.* (Bartolommeo Ammannati *Num.° 78 dopo l'Avviso* Agli Studiosi dell'Arte nobilissima dell'Architettura).

Impronta o Sigillo della R. Accademia Fiorentina di Belle-Lettere (*i*) [ch'erasi di già fondata colla denominazione *degli Umidi* e poscia di *Sacra* nella Casa di Giovanni Mazzuoli da Strada in Via di S. Gallo (*k*)] nell'accordarle la Protezione Sovrana; ma nulladimeno a pochissimi è noto che quest'Oroscopo non fosse per avventura nè casuale nè tampoco astrologico, poichè mirava di fatto all'Epoca dell'elevazione di quel Principe Mediceo al Supremo Governo di Firenze dopo la morte violenta del Duca Alessandro, e non all'*aspetto* degli Astri, ch'era uso allora di consultare nel giorno natalizio dei Grandi. Avvenne l'elevazione predetta quando il Sole trapassato il punto del Solstizio Jemale trovavasi ancora nel Segno dell'Eclittica riferito di sopra; e lo rammemora, oltre alla Storia, una Lapide tuttora esistente in *Via dell'Acqua* tra le due strade Urbane *Guelfa* e *del Palagetto* presso la Chiesa di S. Orsola, e non lunge dal *Canto alla Macine* di Firenze, nella qual Lapide quadrilunga o rettangolare sta incisa in tre versi la seguente Iscrizione — COS. II . MED. NONO . IAii . DIE . MDXXXVI . AD SVMMAM . DVCIS . FLOR . II . DIGNITATEM . MAXIMO . CVM . OMNIVM . FAVORE ET . GRATIA . EVECTVS . EST — Sembrano poi dell'aurea penna del Senator Piero Vettori le quattro Iscrizioni scolpite nei *cartelloni* marmorei dei due Archi minori del Ponte, cioè, dalla parte dell'ingresso dell'acqua, a sinistra — COS. MED. MAG. ETRVR. D. VRBI . DEIECTO . PONTE . DEFORMATAE . SVAM . SPECIEM . REDDIDIT . A. M. D. LXIX —, a destra — COS. MED. D. MAGN. ETRV. VI . FLV. EVERSVM IN . MELIOREM . FORMAM . RESTITVIT . M. D. LXIX —, e dal lato opposto dell'escita dell'acqua, parimente a sinistra — COS. MED. D. MAGN. ETRVR. ARNO . PONTEM . QVEM . DEIECERAT . RVRSVS . IMPOSVIT . M. D. LXIX —, e finalmente alla destra — COS. MED. D. II . PONTE . RESTITVTO VRBI . DECVS . CIV. COMMODA . AVXIT . M. D. LXIX —. Congetturo, malgrado il silenzio di tutti i Cronisti, che le riportate Iscrizioni fossero di quel Filologo eruditissimo contemporaneo perchè lo stile è simigliante alla locuzione dell'altro Epigrafe sicuramen-

---

(*i*) Oltre all'Impresa nota delle due *Ancore* incrociate, col Motto DVABVS, si conserva in qualche Museo la Medaglia gettata in bronzo col busto del Duca, ed intorno COSMVS . MED . II . REIP . FLOR . DVX , e nel rovescio il Capricorno celeste con sopra otto Stelle, e la Leggenda di senso mistico ANIMI . CONSCIENTIA . ET . FIDVCIA . FATI.

(*k*) *Fasti Consolari dell'Accademia Fiorentina di Salvino Salvini Consolo della medesima e Rettore Generale dello Studio di Firenze ec. In Firenze* M. DCC. XVII. (Tomo unico in 4.° piccolo) (Si riscontri *L'Autore a chi legge* pag. XX).

te suo, cioè, del Latino Editto del Principe, che vedesi affisso al muro *delle Rovinate* appiè del Poggio di S. Giorgio presso la Chiesa Priorale di S. Lucia *dei Magnoli* in Via *de' Bardi*, — HVIVS . MONTIS . AEDES . SOLI . VITIO . TER . COLLAPSAS . QVIS DENVO . RESTITVERET . COSMVS . MED. FLORENTIN. AC . SENENS . DVX . II. VETVIT . OCTOBRI . CIↃ. D. LXV —. Al qual proposito torna in acconcio osservare quanto si allontanasse da questi prischi esempj d'ottimamente scrivere in Lapidaria chiunque sia stato che abbia composta la recentissima Memoria in marmo — FERDINANDVS . III. LEOPOLDI . AVG . F. M. D. E. AD . ITINERA . COMMEANTIBVS . EXPEDIENDA PESAE . FLVMINI . OB . AQVARVM . INCREMENTA . SAEPE . IMPERVIO . MOLEM PONTIS . SVPERADDIDIT . ANNO . M. DCC. XC. VI — incastrata nel sodo della spalletta o parapetto del Ponte qui nominato in continuazione della strada Regia Romana, ed in poca distanza dalla popolosa Terra di S. Casciano o Cassiano. Era quello il secondo dei Ponti, ch'io avea immaginati ad imitazione del vaghissimo di S. Trinita, entrambi egualmente a tre archi, e a un di presso ambidue col medesimo ornato, ma di materiali men ricchi o meno profusi; il primo dei quali Ponti nella Via Lauretana sul Fiume Arbia al passo detto *delle Taverne*, lontano poche miglia da Siena, finito nel M. DCC. LXXXVIII, e costrutto in parte di lavoro quadro e nel resto di travertino di Monte Reggioni a compimento della *cortina*, ebbe miglior sorte dell' altro fatto di muro andante in calcina e screziato di pietra forte, che fu menomato nelle misure e ristretto negli accessorj dall'Ingegnere ch'ebbe l'incarico di soprintendervi.

In rapporto alle varie particolarità della fabbricazione del Ponte, che mi somministra argomento speciale per il presente Discorso, ho avuto a tutt'agio sott'occhio un *Taccuino* o Libercolo di Ricordi in pergamena di picciol *sesto*, scritto di mano d'Alfonso e Giulio, padre e figlio Parigi, e favoritomi autografo dall'amichevole gentilezza del Cav. Cosimo Rossi Patrizio Pistojese, Vice-Presidente meritissimo della Regia Accademia delle Belle-Arti, e per il passato Direttore interino della Real Galleria di Firenze. Risulta da quel minuto Giornaletto o Diario che nello scavo pei fondamenti del nuovo Ponte s'incontraron gli avanzi di due *Pile* più vecchie di quelle in ultimo rovinate; ed oltracciò si rileva che insieme coll' Ammannati assisterono alla nuova edificazione del medesimo Ponte il summentovato Alfonso di Santi Parigi, detto per so-

prannome *il Francia*, che fu poscia Architetto del Gran Duca Francesco figlio di Cosimo, ed in qualità di *Maestro sopra li Maestri*, ossia di Capo-Maestro Muratore Giuliano di Francesco da Montauto. Apparisce in secondo luogo quali fossero le dimensioni e *modinature* precise, ordinate dall'Ammannati, di tutte le parti del Ponte, cioè la *ghiera* o *brachettone* alto braccia $1\frac{1}{2}$, la grossezza dal *sottarco* sino a tutto il *lastrico* della *carreggiata* braccia $2\frac{1}{3}$, il *rigoglio* dell'Arco di mezzo 7 braccia e 13 soldi, le due *Pile* da punta a punta lunghe ciascuna braccia 40, grosse o larghe 14, e tutta la lunghezza del Ponte dalla destra sponda alla manca di braccia $169\frac{2}{3}$, collo sfogo o vano di braccia 15 dal piano della *platèa*, *batolo*, o *lastrico* andante nell'alveo del Fiume sino al colmo o *sottarco* del Voltone intermedio. Finalmente vi si rende contezza come il Parigi, cui ne fu data dall'Ammannati la commissione, si diportasse nel disegnare e dirigere l'*Armadura* onde posarvi le *Centine* e gettarvi sopra le Volte; *armadura* semplice, ingegnosissima, e senza *ritti* o puntelli, composta di sette *cavalletti* paralelli verticali per ognuno dei tre Voltoni, ed oltracciò d'un *cavalletto* di maggior impegno a rinforzo per quello di mezzo; essendo ciascun dei Voltoni largo braccia 17 soldi $12\frac{1}{2}$, laddove la *carreggiata* è larga sole braccia 17, e spartita in due *marciapiedi* (l'uno e l'altro della larghezza di braccia 3, più sollevati da $\frac{1}{6}$ sino a $\frac{1}{3}$ di braccio) e nella strada intermedia battuta dalle Vetture, ch'ha la rimanente larghezza di 11 braccia.

Nella I.ª Tavola ho fatto delineare insieme colla conformazione dei *Cavalletti* dell'*Armatura* (A) (B) il Taglio o Profilo del Ponte (C), e la Pianta d'una delle due *Pile* (D) segnata per suo proprio studio nelle prime pagine del precitato Libretto da Alfonso Parigi (*l*); giovine allora da non molto tempo impiegato in lavori d'Architettura, che in seguito professò ed esercitò con gran credito sino alla sua morte avvenuta li 8 d'Ottobre M. D. LXXXVII, e vale a dire pochi giorni avanti che

(*l*) Havvi nei *Ricordi* l'esempio d'un'altra *Armadura*, tutta *a contrasto*, come direbbesi in frase dello Zabaglia, e più complicata delle due precedenti; ed è quella sotto lettera (E), la quale sostiene il *tavolato* del Ponte *volante* o di legno sul Torrente di Macereto nella Regia Via Crossetana, che termina in oggi al Porto di Castiglione della Pescaja della Maremma Senese.

il Cardinale Ferdinando I° salisse al Trono della Toscana. Imperocchè ivi confessa tra gli altri *ricordi* che nel 2 di Febbrajo M. D. LXV egli cominciò ad operare, e nominatamente nella fabbrica della R. Cappella *de' Pitti* presso la Scala *a chiocciola* del Palazzo, ed indi a poco, cioè nel 25 di Luglio M. D. LXVI, ebbe luogo d'assistere al muramento del gran Cortile interno dell'istesso Regio Palagio, con mirabile magistero ornato dall' Ammannati d'Ordin Toscano, Dorico, e Corintio, e negli anni consecutivi M. D. LXIX — LXX — LXXII — LXXIV — LXXV — LXXX diresse i lavori del pubblico Archivio, delle Scuderie sotto i portici degli Uffizj, non meno che della Zecca e facciata delle dette loggie vers'Arno, a cui fanno capo i Deambulatorj de' XIII Magistrati, ed in oltre della Cloaca sotto la colonna Diocleziana di S. Trinita, in cima della quale riposa la statua colossale della Giustizia, alta 7 braccia, scolpita in porfido da Romolo Del Tada da Fiesole, delle Fortezze di Volterra, di S. Martino in Mugello, e di Belvedere (*m*), delle Ville Reali del Poggio a Cajano e Careggi, del Palazzo Scarlatti sulla Piazza de' Mozzi, e del Convento degli Agostiniani di S. Spirito. Perchè poi le misure *lineari* Fiorentine non rechino usandole alcuna difficoltà, nè trascurisi di giovare all'intelligenza principalmente de' Forestieri, non sarà discaro il sapersi che fin dal M. DCC. LXXX riscontrati i *Campioni* del braccio Fiorentino (chiamato volgarmente *da panno* in opposizione al più corto di $\frac{1}{16}$ e di già abolito *da terra*) e del piede Real di Parigi (collegato in oggi con tutto il sistema *metrico* della Francia), che sono in lastre di bronzo dentro il Pozzetto o Chiusino dello Gnomone o Meridiana della Cattedral di Firenze, e si riportano alla *Tesa* Francese, che seco aveva tornando da misurare nell'Emisfero Australe i *gradi* del Perù il Matematico De La Condamine nel suo passaggio per la Toscana, trovai corrispondere il braccio suddivisato a $1^{Pi.}\ 9^{Po.}\ 6^{Li.},83$ segnando il Mer-

(*m*) Quest'ultima fu compiuta da Ferdinando I, che insieme colla Gran Duchessa Cristina gettò la prima pietra d'un dei Bastioni nel M. D. XC li 28 d'Ottobre, dopo approvato il nuovo Disegno di Don Giovanni de' Medici. Vi furon sepolte Medaglie d'oro, d'argento, e di bronzo con un'Iscrizione in marmo, che contien l'epoca ed il fine avutosi nel fabbricarla. — PVBLICAE . SECVRITATI CONSVLENS . V . KAL . NOVEMBRIS . ARCIS HVIVS ..... HVNC . PRIMVM . LAPIDEM POSVIT ..... AN. SAL. CIↃ.IↃ.XC —.

Mercurio 13° sul Termometro di Réaumur, laddove stando al nuovo *Metro* con piccolissima e non attendibile differenza dicesi corrispondere a $1^{Pi.}\ 9^{Po.}\ 6^{Li.},75$ mentre sia 0° la temperatura indicata dall'istesso Termometro Réaumuriano, o sivvero il punto del Ciclo.

A fronte nulladimeno dell'estesissimo ragguaglio lasciatoci dal Parigi di tutte le appartenenze del Ponte di S. Trinita fino al segno d'aver descritto come fossero eseguite le *casse* o *ture* piene d'argilla ben pestonata e le doppie *palafitte*, distanti 4 braccia una dall'altra, sì pel fondamento del *Batolo* che delle *Pile*, ed aver notata di più la lunghezza dei *pali* dalle braccia 14 alle 18, e di braccia 7 nella fondazion delle *Pile* predette, il modo di cavar l'acqua e la ghiaja, e di gettar nel vuoto lo *smalto*, e coprir questo di pietre o *leghe* paralellepipede, lunghe 3 braccia, larghe $\frac{3}{4}$, e grosse $\frac{1}{2}$, incatenando o arrombando colle medesime le teste dei *pali*, e facendovi una *risega* di braccia 4, con più un *lastrico* andante, grosso tra *smalto* e *lastre* braccia $1\frac{1}{2}$, nulla poi vi si dice della maniera, colla quale fu segnata la *Centina*, e di che natura ella fosse, nè altro ivi si legge eccettochè l'espressione *centinati per tondo gli archi*; frase assai vaga, ma che piuttosto s'accomoda al *Circolo* che alla *Parabola*. Non manca dunque di recar meraviglia che l'Architetto compagno dell'Ammannati nell'impresa di questo Ponte, il quale fu così diligente da por tra i *ricordi* del suo *Giornaletto*, parte domestici, parte istorici, e molti d'Arte, il rapporto che aveva colle misure del Ponte Vecchio, ed accennare tutta la *spesa* che importò il nuovo di S. Trinita, ascendente secondo lui a Fiorini 42604.3.6.—., non meno che il giorno 15 Aprile del M.D.LXIX, che vi transitò il Duca Cosimo subito che la Fabbrica fu terminata, ommettesse di dar notizia della precisa forma e qualità del *tondo*, in cui vennero piegate le *Centine*, onde posarvi a stretta i grossi *cunei* di pietra-forte (tutti commessi però o conventati, non già all'ubbidienza e norma d'un solo punto come se fosse *centro* d'una porzione di Circolo, ma dirizzati a diversi *centri* o sivvero normali alla periferia esterna ed interna dell'Archivolto) sì dei Voltoni che delle *ghiere* degli Archi. Siffatto silenzio tanto maggiormente sorprende quantochè al prefato Parigi venne affidato *in capo* il lavoro dell'*Armadura*, ed il prenominato Maestro Giuliano

attese a metterla in opera sotto di lui. I *Cavalletti* puntavano od impostavansi sopra un *pancone* di quercie, grosso $\frac{1}{4}$ di braccio, sostenuto come su d'una *mensola* da un tronco di travetta parimente di querce, lungo 3 braccia, grosso ed alto $\frac{2}{3}$ di braccio, il qual tronco incastrava nella respettiva *buca* lasciatasi nelle Pile, ed aveva l'aggetto di $\frac{2}{3}$ di braccio sulla faccia del muro delle medesime. Questi legni, che coi *panconi* o tavoloni appostivi sporgevano in fuori e sostenevano i *Cavalletti*, eran distanti o discosti poco più d'un braccio tra loro. Sopra i *Cavalletti* maggiori, col *monaco* in aria a contrasto e senz'*asticciuole*, posavano i minori, e su questi i minimi, e quindi le *Fusajole*, lunghe ciascheduna 3 braccia, e commesse o congegnate nel modo che dimostrasi dall'annessa Figura (F), le quali *Fusajole* incurvate nell'orlo superiore, com'esigeva la *Centina*, servivan di norma ed appoggio ai *bordoni*, ch'eran *trainì* di legname secco o ben stagionato dell'Opera di S. Maria del Fiore ossia delle Macchie d'Abèti del Casentino, lunghi 12 braccia, larghi $\frac{1}{2}$, grossi $\frac{1}{3}$ (e ricubano 16000 soldi cubi, cioè 2 braccia cube, pesanti ciascun braccio libbre 277, e oncie 9), sdrajati orizzontalmente e posti paralelli e a contatto, com'usasi nel situare *canne* o *asserelle* per le Volte *reali* o a tutto *sesto* o in *ovale*.

Dal confronto del Ponte Vecchio disegnato dal Gaddi col Ponte di S. Trinita fatto secondo il modello dell'Ammannati pare che rendasi manifesto d'onde quest'ultimo Architetto e Scultore prendesse regola per assegnarne a quello, che andavasi a fabbricare, le principali misure. Conciossiachè l'Arco di mezzo del Ponte Vecchio ha egualmente braccia 50 di *corda*, 15 $\frac{1}{3}$ dal *batolo* al *sottarco*, 7 $\frac{2}{3}$ di *rigoglio*, e braccia 16 di *carreggiata* tra le due file di Officine d'Orefici, con due Piazzette o *Veroni* intermedj, profondi o larghi braccia 7 per ciascheduno sino alla *spalletta* o parapetto, grosso $\frac{2}{3}$ di braccio. Una differenza soltanto incontrasi nella larghezza del Voltone, ch'è circa braccia 31 $\frac{1}{3}$, non meno che nelle *Pile*; poichè ogni *Pila* delle due, che sostengono il Ponte Vecchio, è grossa 11 braccia, laddove per il detto di sopra ha la grossezza di braccia 14 ciascuna delle due *Pile* di quello di S. Trinita; e questa eventual differenza si dee alla maggiore angustia della *sezione* dell'Arno, ch'è largo sole braccia 162 nel sito del primo, quando per il contrario lo è di braccia 169 $\frac{2}{3}$ nella po-

sizion del secondo. Altra discrepanza rilevo dall'*appunto* del Ms.° del Parigi rispetto alla spesa *netta* erogata nella fabbrica del nuovo Ponte di S. Trinita. Imperocchè dalla Relazione autentica del 1 di Marzo M. D. LXXI distesa da Luca Fabbroni, allora Provveditore del Magistrato dei Capitani di Parte Guelfa ed Uffiziali di Torri e Fiumi, indirizzata al Ser.mo Gran Duca Cosimo, ed esistente tra le *Filze* dell'Archivio della Regia Camera delle Comunità di Firenze, in cui si rende minuziosa contezza di tutto lo *speso*, depurato dai ferramenti ed altre *robe* avanzate, e massimamente dal prezzo del legname in essere delle *Armature* dopo tolte le *Centine*, si fa chiaro che il nuovo Ponte importasse soli Scudi o Fiorini d'argento (colla solita antica Sigla di computo V) 38490.5.17.10 secondo il diffuso *Bilancio* o Conteggio tenutone dal Ragionier dell'Uffizio Antonio Gherardini, il quale nello stato *attivo* a fronte del *passivo* rammenta i molti materiali mandati dagli avanzi di quella Fabbrica alle veglianti Opere della Fortezza o Castello, ai Lavori d'Arno presso Legnaja, ed altri Edifizj di ragion pubblica; coll'avvertenza di più d'aver consegnati diversi Legni per supposta Commissione del Principe e pel valore di Scudi 31 all'Ingegnere Bernardo Buontalenti, detto *delle Girandole*, e per esso a Piero Buonaventura; rispetto a che *rescrisse* Cosimo li 6 di Marzo col suo solito laconismo governativo, autenticato dal *Visto* dell'Auditor Lelio Torelli e sottoscrizione del Segretario Jacopo Dani, — *Chi ha avuti i Legni li paghi. Il resto sta bene* —. E per dar tutto il peso e circoscrizione, che merita, a sì fatta *spesa*, giacchè il valor dei metalli preziosi, come merce universale rappresentativa di tutte le sussistenze ed industrie, è sempre vario in diversi tempi, non meno che la proporzione sempre incostante tra l'oro e l'Argento, posson gli esperti Economisti facilmente raccoglierlo da due fatti incontrovertibili d'Istoria Patria, e presso a poco contemporanei. Il primo si è (come accerta Giulio Parigi nel *Giornaletto* più volte citato) che lo *Stajo* del Grano o Frumento, durante il Governo del Gran Duca Francesco I° (che morì nella Villa del Poggio a Cajano insieme colla Bianca Capello il 25 d'Ottobre M. D. LXXXVII), costò *di ragguagliato* lire 4.5.6 con grande scontentamento e malumore dei Fiorentini: il secondo consiste in sapersi dagli Scritti d'Agostino Del Riccio che a suo tempo, cioè verso il M. D. LXXX, lo Zec-

chino o Gigliato (quella moneta d'oro *puro* medesima, la quale nel M. C. LXXXII suddivisa in 20 soldi *d'oro* ed ognuno di questi in 12 danari similmente *d'oro* e chiamata Scudo *d'oro*, pesando 3 *danari* ossiano 72 *grani* valea dipoi nel M. D. V. lire 7) valutavasi lire 10 d'Argento, e quindi 10 $\frac{1}{6}$ nel M. DC. VIII, e così fino al M. DCC. XI. sotto il reggimento di Cosimo III°, mentr' ora con un *grano* di meno per rapporto al peso che avea nel M. D. XXV., e calante di mezzo *grano* rispetto al Veneto costa lire 13 $\frac{1}{3}$, siccome apertamente risulta da una Nota Monetaria stampata nella Reale Tipografia di Firenze, e che infra i pochi possiedo.

Null'altro perciò ricavandosi dai Documenti eh'esistono, quando non ve ne fossero degl'incogniti, i quali giacessero oscuri nella polvere di qualche Archivio domestico, lo che per l'assunto propostomi torna oggi l'istesso, ed essendosi smarrita ogni traccia della Curva immaginata e descritta dall'Ammannati, restava un solo partito da prendersi, ed era quello di rinvenirla mediante le misure attuali. A questo proponimento io mi prestava tantoppiù volentieri quantochè non potea darmi a credere come in un'età anteriore a Galileo si conoscesse in Toscana (e massimamente da un Architetto) la *Parabola* d'Apollonio, mentre altronde dall'Istoria Letteraria sappiamo che Galileo stesso non fu mai in grado nella sua adolescenza di trovar alcuno, che gl'insegnasse la Geometria, eccettochè il debile Ostilio Ricci da Fermo, fatto a bella posta venire dal Gran Duca Francesco I° per istruzione de' suoi Paggi-d'onore (*n*); e Vincenzio Viviani ebbe a stento il vantaggio d'imparare le prime Proposizioni d'Enclide dal P. Clemente Settimj da S. Carlo, Scolopio e discepolo del Michelini (*o*). Ben è vero che senza sapere ch'ella fosse una Sezion Conica, gli Architetti segnavano in piano andantemente con moto continuo un'*Ellissi* conducendo una corda a due punti o due centri, invece d'un solo che adoperavano segnando il *Circolo*: ma erano quelli stessi, i quali mal supponevano che fosse egual-

(*n*) „ Iscrizioni che si trovano negli „ Atti dell' Accademia Colombaria di „ Firenze ec. Tomo secondo. In Firenze „ M. DCCC. I nella Stamperia Albizziniana „ alle pag. 176-77.

(*o*) *Joannis Lami Memorabilia Italorum eruditione praestantium, quibus vertens Saeculum gloriatur. Tomi II. Pars I. Florentiae* M. DCC. XLVII. *Ex Typographio ad Plateam Sanctae Crucis*. Ivi alla pag. 7 — *Florentiae unus tantum Mathesin profitebatur etc.*

mente *Ellissi* anco la Curva *ciclocilindrica* segnata con un *compasso* sulla superficie d'un Cilindro retto ricoperto di carta, tosto che questa venisse poi svolta e ridotta piana. Oltrediciò le prime Versioni dal Greco d'Apollonio Pergèo, d'Archimede, e di Pappo son posteriori tutte all'epoca degli studj dell'Ammanati. S'aggiunga al già detto che tutte le *modinature* in Architettura, e perfino il *sesto-acuto*, non essendo che combinazioni diverse di linee rette e d'archi di Cerchio, e degli ultimi insiem combinati (tranne i *listelli* o altri membretti di faccia piana) riescendo difatto gli *astragali* o *tondini*, i *tori*, i *gavetti*, gli *ovoli* o *vovoli*, le *gole diritte* e *rovescie*, le *scozie*, le *volute*, ed anche il profilo, per esempio, del secondo *cornicione* di Buonarroti a tre centri nel Vestibulo incompleto della Libreria Laurenziana-Medicea, od altri particolari profili che non s'incontrano presso gli Antichi, n'avviene che gli studiosi d'Architettura non abbiano mai familiari se non che linee rette, o spettanti al *tondo* preso nel più ristretto senso possibile, e poco o niente s'ingeriscano d'altre Curve o *geometriche* o *trascendenti*. Conservano l'istesso carattere, perchè sempre dipartite dal vero *tondo*, le Volte e Cupole usate in Architettura, come l'*emisferica* e la *vela* dedottesi dalla sfera, e quelle ricavate dal Cilindro, cioè a *mezza-botte*, a *ciel-di-carrozza*, a *crociera* (dai *costoloni* delle due ultime delle quali surse forse la prima idea dell'*Ellissi*), e la *Fiorentina* ideata da Viviani più per ischerzo enimmatico o pompa geometrica, che per coprirne difatto Templi o Basiliche, che dir si sogliono le *Rotonde*. E quei *ghiribizzi* medesimi per lo più nati nel Regno dei Goti in Italia o dalla Scuola Borrominesca, e con tutta ragione vituperati dal Gallaccini (*p*), in virtù de' quali s'introdussero a grado a grado contorni sconcj e devianti dagli archi di Circolo, sino al segno di contorcere le *colonne* in figura d'*Elica* o Spirale cilindrica, ricopiata dalle Scale cocleari o *a lumaca*, e le *affusature* delle *colonne* subitochè principiarono per maggior grazia,

(*p*) „ Trattato di Teofilo Gallaccini „ sopra gli errori degli Architetti, ora „ per la prima volta pubblicato. In Ve- „ nezia M. DCC. LXVII. Per Giambatista „ Pasquali „. (in gran fogl.) — „ Osser- „ vazioni di Antonio Visentini Architet- „ to Veneto, che servono di continua- „ zione al Trattato di Teofilo Gallacci- „ ni sopra gli errori degli Architetti. „ Venezia M. DCC. LXXI „ (del medesimo *sesto* e stampa).

ad accostarsi alla forma d'una *Concoide*, prendevan regola indirettamente dal Cerchio; manifestissimo essendo che la Curva di Nicomede, la qual s'accosta al profilo del guscio o valva d'una *conchiglia*, descrivesi con un *compasso* poco diversamente dalla delineazione del Circolo; e l'*Elica* postaci di frequente sott'occhio dalla Natura sino agli ultimi esseri microscopici nei *Testacei* o viventi o petrificati, e nelle *trachèe* delle Piante, altro non mostra in sostanza fuorchè una *circonferenza* di Cerchio stirata o protratta equabilmente lungo una *retta* che le stia sopra verticale od *a piombo*. Son poi di modernissima data i Ponti gettati su d'una *Centina Cicloidale*, come in Etruria quello assai piccolo del Torrente Arzana, che sbocca in Ombrone press'Arno tra il Poggio d'Artimino ed i Colli di Signa accanto al Ponte semicircolare *di Riboccatura* (e lo diresse il Viviani per onorar la memoria di Galilèo, creduto da lui inventore della *Cicloide* o *Trocoide*, mentre veramente rimonta al tempo del Cardinale Da Cusa), o gli altri sull'*Evoluta del Circolo*, come il Ponte sul Sestajone a due archi di braccia 41 di *corda*, e 14 di *rigoglio* (il cui Prospetto e *Armatura* si pubblicarono colle stampe nel M. DCC. LXXXI) e quello di minor *corda* e d'un arco solo sopra la Lima, entrambi disegnati dall'Ex-Gesuita Ximenes, e fabbricati con inopportuna magnificenza a comodo della Regia strada novissima, che da Pistoja conduce a Modena per il dorso dell'Appennino. Nè merita qui di tenersi proposito d'un'idea fuggitiva, che suggerisce uno sbozzo di Figura coll'epigrafe PER I PONTI nel Codice delle Opere inedite del Torricelli (conservato tra gli altri Libri del Real Musèo di Firenze insieme coi pochi avanzi dell'Accademia DEL CIMENTO, e colle tre Lenti *oggettive* lavorate dall'istesso Geometra, una di circa 3 soldi d'apertura e braccia 10 $\frac{1}{4}$ di lunghezza *focale*, la seconda di soldi 5 di diametro, e braccia 15 di distanza di *foco*, e la terza d'apertura di soldi 6 e braccia 30 $\frac{1}{2}$ di lontananza parimente di *foco*), dal quale schizzo par che rilevisi il Progetto d'un Ponte *centinato* a foggia di due simili ed eguali porzioni di *Logistica* o *Logaritmica* congiunte ad angolo molt'ottuso, mentre l'*asintoto* orizzontale vi segna la cima del *parapetto*. Sennonchè potrebbe per avventura cadere in dubbio che l'intenzione di Torricelli mirasse piuttosto alla *Catenaria* o *Funicularia*, o ad una delle *Camariche* d'Erone che dir si vogliano, e ch'ei

contemplò nei suoi Scritti avendo taluni spacciato essere stata la Curva, su cui Michel Angiolo, posta una base circolare, girò il gran *Tolo* ossia Cupola Vaticana, quando ancora non era noto ch'essa Linea fosse il Volto *per eccellenza*, come quello che solo poteva reggersi senza presidio di *perni*, *grappe*, o cemento, e quando per il contrario Carlo Fontana assicura d'aver ritrovati nel pavimento della Romana esterna Basilica di S. Paolo quei medesimi punti della Curva interior della Cupola, de'quali si servì Giacomo Della Porta (che con Domenico Fontana assistette alla prima fabbrica di quella parte del Tempio dedicato a S. Pietro) per rintracciarne i *sesti*, e quindi porre all'istessa Cupola le catene, onde ovviare al temuto pericolo di rovina. Tutte le considerazioni accennate facendo sì ch'io propendessi a supporre non *parabolici* gli archi del Ponte in questione, mi riteneva pur sempre in qualche dubbiezza l'asserto del Vanni, che aggiunge nel passo citato, oltre alle parole *Centine ovali*, l'altro modo incerto ed indeterminato d'esprimersi *o d'altre forme composte o miste con altra invenzione di Linea Curva, come sarebbe Cicloide ec.*, per non dire ch'io dava ancora alcun peso alla sicurezza e tuon magistrale, con cui scrive il Grandi, ed alla tradizione costante e favorevole alla *Parabola*, che, come avvertii, tuttavia si conserva dalla Scuola Fiorentina d'Architettura, e che può solamente cancellarsi e distruggersi per mezzo d'un fatto immediato, qual è quello che vado adesso a descrivere.

Incaricai nel M. DCC. LXXXV. o in quel torno l'Ingegnere Giuseppe Salvetti acciò rilevasse le misure fondamentali della metà dell'Arco intermedio del Ponte di S. Trinita, onde riportarle dipoi sulla carta per via d'*ordinate* verticali applicatesi ad una orizzontale comune di braccio in braccio, e così conseguire i punti della Curva cercata, considerandola intanto come *Flessilineo* o *Poligono*. Diligentissimo com'egli era, e fornitosi degl'Istrumenti più accurati ed esatti affin d'eseguire la commissione, per cui allora contava ad onore d'esser stato da me prescelto a quest'uopo infra i molti Architetti Toscani viventi, limitò con XXVI *ordinate* l'andamento del *mezzo Arco interno* da sommo ad imo ossia dal *colmo* all'*impostatura*; il che rendesi chiaro dalla Figura (G) della Tavola II, la quale abbraccia l'insieme dell'affidatagli puramente meccanica operazione. Trascurabile mi comparisce la differenza

picciolissima d'un solo Danaro in difetto della grossezza dell' *Arco* determinata tra la penultima e l'estrema *ordinata* di braccia 1 . 9 . 11 , a paragone di quella di braccia 1 . 10 . —, lasciataci scritta da Alfonso Parigi. Ma più cospicua, ed in senso contrario, ch'è quanto dire in eccesso di soldi 2 e 3 danari, essendo la differenza tra il *rigoglio* trovatosi dal Salvetti, cioè braccia 7 . 15 . 3 , e quello datoci dal Parigi di braccia 7 . 13 . — . , non possono per conseguente discrepanze opposte sì fatte aver causa simultanea dalla diversa lunghezza del *Campione* del braccio dal Secolo XVI al XVIII. L'ultima differenza dimostra piuttosto una qualche mossa accaduta nell' Arco dopo tolte le *centine* [caso frequentissimo ad avvenire nelle gran Volte, e rispetto ai Ponti singolarmente esaminato con iscelta d'esempj in una dotta *Memoria* dell'Accademia delle Scienze di Parigi tra l'altre dell'anno M. DCC. LXXIII (*q*)], forse per lo spinger dei fianchi all'insù nel riserrarsi dei *cunei* di pietra o venire a più stretto contatto tra loro; e ciò, per avventura, a motivo della mancanza di valevol carico nella cima, e perchè il Ponte, come vedremo, nel vertice d'ognun de' suoi *Archi* fa un angolo ottusissimo, studiatamente coperto o larvato dall'Ammannati coll'apposizione dei *Cartelloni* (*r*). Il *lastrico* sul punto di mezzo del Voltone del minor *Arco* laterale dalla parte della Colonna di S. Trinita si riscontrò dal prefato Ingegnere essere della grossezza di soldi 8, e sott'esso uno strato di finissimo *smalto* grosso egualmente, e la grossezza

(*q*) Havvene la ristampa cominciando dalla pag. 601 dell'Opera *sopra i Ponti* di Perronet, e segnatamente al Titolo *Mémoire sur le cintrement et le décintrement des Ponts, et sur différents mouvements que prennent les Voûtes pendant leur construction*.

(*r*) I Parapetti, i Marciapiedi, ed il Lastrico vecchio per la lunghezza di circa 20 braccia nel mezzo del Ponte o vanno ed andavano in piano, o affacciano ed affacciavan piuttosto una picciola cavità, e massime la *cimàsa* dei primi, d'intorno a soldi 1 = di braccio. Forse è ciò un mancamento indotto dai *lastrici* successivi, o dal logoramento dei materiali nel lasso d'oltre a due Secoli. Forse fu inganno dopo la mossa del Ponte, o difetto d'esecuzione come riscontrasi in altre sue parti col braccio alla mano, e massimamente nelle altezze del Parapetto. Mancamento egli è parimente l'altro della *carreggiata*, che per circa 22 braccia di qua e di là dal punto di mezzo non avea scolo, ed è stato perciò indispensabile di rialzarla nei nuovi *lastrici* dopo la morte dell'Ammannati (che nato nel 1511, morì nel 1586) e d'Alfonso Parigi seniore, che Milizia confonde col Nipote o'l juniore figlio di Giulio alle pag. 78 e 186, 187 del Volume citato nella *Nota* (*hh*). Confrontisi questa coll'altra *Nota* seguente (*gg*).

sezza della Volta consecutiva di braccia 1 $\frac{1}{4}$; cosicchè cumulate le tre misure ammontano a braccia 2 $\frac{1}{20}$ dalla superficie della *carreggiata* al *sottarco* degli *Archi* minori, mentre per crescer carico gradatamente ell'è una grossezza di braccia 2 $\frac{1}{3}$ rispetto al *colmo* dell'*Arco* intermedio e maggiore.

Posto ciò, e con riportarsi alle divisioni medesime, ma ad una linea orizzontale paralella alla prima e staccata dal *colmo* dell'Arco interno dell'*Archivolto*, adoperando la maniera notissima di tracciare una porzion di *Parabola* in sembianza di *Poligono* o *Flessilineo* formato mediante le intersezioni respettive delle *tangenti*, come manifestano apertamente nella precitata Figura le congrue punteggiature, affacciossi subito all'occhio quanto divergeva di troppo e scostavasi, massimamente nel fianco, dopo alzatosi dalla *Pila* il *Poligono limite*, circoscritto alla Parabola Apolloniana, dalla giacitura della vera Curva del Ponte. L'Arco *parabolico* a contatto coi soli due estremi veniva ad abbracciare difatti onninamente nel rimanente l'attuale *centinatura*, in cui piegasi il Ponte, e le stava superiore non meno di $\frac{3}{4}$ di braccio dalla XVI^a sino alla XXII^a *ordinata*; di tal maniera che, se l'Ammannati, il quale ebbe l'idea (come accertasi dal Baldinucci) che *anco ne' fianchi fosse l' apertura degli Archi capacissima e del tutto vuota*, all'effetto che il Ponte desse più libero sfogo alle piene ed ai legni o consimili galleggianti per lo più trasportati dalle medesime, ed ammettesse anche maggiore *sveltezza e leggiadrìa* di quella, che oggi lo rende *uno dei Ponti più maravigliosi d' Europa;* se (dico) quell'esimio Architetto avesse saputo come questa *centina* conseguivasi nel facil modo indicato, l'avrebbe tosto accettata e posta in pratica come più confacente al suo fine in confronto dell'altra meno svelta ed aperta, ch'egli prescelse. Sennonchè è da riflettersi che ad un occhio avvezzo alle grazie delle *modinature*, ed a scorgere incontanente i minimi nèi nell'andamento dei contorni sarebbe rincresciuto per avventura quel malgarbo patente ed alla vista odiosissimo d'una *Parabola* così descritta, che averebbe il suo *vertice* principale non all'*impostatura*, ma sopra, quantunque più prossimo ad essa che alla *cima* dell'Arco, e tanto più vicino quanto sia più scarso il *rigoglio*, non corrispondendo al punto di mezzo fuorchè nel caso che il *rigoglio* eguagliasse la metà della *corda*. Non potè a meno De la Hire di non notare tal man-

camento negli *Atti* dell'Accademia delle Scienze di Parigi del M. DCC. II, e lo paragonò alla piegatura naturale del cubito (*coude*), o come dicono gli Artisti Francesi al *jaret*, generalmente biasimato in Architettura; dal che si deduce esser sempre da preferirsi a siffatta linea *Parabolica* la mezza *Ellissi* (*s*), chiamata in Francia, a testimonianza di Belidoro, *Ovale du Jardinier*, onde distinguerla da quelli *Ovati* descritti con tre o più centri (*Anses de panier*), che non son Curve uniformi geometriche, ma composte di varj Archi di Cerchio, e tale insomma qual fu tra le prime eseguita nel M. DC. LXXXV per gli Archi del Ponte Reale a Parigi sopra la Senna. Questo punto d'architettonica ineleganza, comunque si fosse potuto coprire all'occhio dello spettatore mediante l'*aggetto* della *cornice* della Pila, quasi in quel modo medesimo, con cui l'Ammannati ha coperto l'accenno poco venusto di *sesto-acuto* (*tiers-point*) nella *cima* dell'Arco, è sempre agevole a determinarsi stando alle conosciute Teorìe delle *Coniche*. Imperciocchè condotta l'*Ipotenusa* AC del Triangolo-rettangolo, che ha servito di norma alla *Centina*, è certo che quella passerà per il *foco* della *Parabola*; laonde congiunto il vertice D dell'angolo-retto col punto di mezzo B dell'*Ipotenusa* predetta, sarà la retta congiungente BD un dei *diametri* della Curva; e la perpendicolare DF sull'*Ipotenusa* medesima segnandovi il *foco* F, la FO paralella a BD sarà l'*asse*, e segnerà in conseguenza sulla *Centina parabolica* il punto ossia *vertice* O, che cercavasi di conoscere. Non è poi vero che fosse di nuova speculazione questa foggia di delineare col metodo suddivisato il perimetro d'una *Parabola*; perchè, quantunque De La Hire più d'un mezzo secolo dopo d'Evangelista Torricelli, che morì nel M. DC. XLVII, giudicasse d'aver egli il primo nel M. DCC. II fattane la scoperta per mezzo dell'Analisi algebrica (*t*), e dopo di lui coll'apparato dell'Algebra *infinitesimale* l'abbia creduto Lodo-

---

(*s*) Vedansi gli *Atti* precitati, e segnatamente alla pag. 102 dell'Edizione in 4.° del M. DCC. XXXII, e più sotto, a 103. — *On peut donc conclure qu'une demi Ellipse convient bien mieux à cette courbure* (des Arcs) *que la Parabole, quoiqu'elle soit fort facile à decrire par la mèthode qu'on propose.*

(*t*) *Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Année M. DCC. II, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique pour la même Année etc. A Paris M. DCC. XXXII.* Ivi alla pag. 100. *Remarques sur la forme de quelques Arcs dont on se sert dans l'Architecture,* sino a 103 inclusivamente.

vico Wentzio ritrovamento suo fino dal M. DCC. XLVIII, palesandolo come tale e di quell'anno preciso nel Volume III° degli *Atti Elvetici* pubblicato coi torchj di Basilèa nel M. DCC. LVIII. [Tavole XVI e XVII, e soprattutto, per un occhio veramente geometrico, Figura 1.ª *grafica* e universale (*u*)], esso trovato dipende immediatamente dalla Proposizione o Teorema XLI del Libro III° delle *Coniche* d'Apollonio Pergèo, con chiarissima Sintesi ripetuto da Roberto Simson nella XIV^a del Libro V° *Sectionum Conicarum Libri quinque*, seconda Edizion d'Edinburgo del M. DCC. L.

Esclusa dunque per via di fatto la *Centina parabolica*, mi provai ad adattare la *Curva ellittica*, sezione ad un tempo del Cilindro e del Cono, e modernamente decantata per quella che cade oggi in Problema da Perronet, rinomatissimo Ingegnere-in-Capo Francese e Direttore delle Fabbriche pubbliche, il quale negli *Atti* dell'Accademia delle Scienze di Parigi del M. DCC. LXXVII (pag. 563) così letteralmente s'esprime: *On pourra employer une courbure elliptique, comme on l'a fait au Pont de la Trinité à Florençe* (*v*). Ma questa Curva eziandio, tratteggiata di nero nella Figura, avvengachè meno della *Parabola* s'allontani da quella Centina, che immaginò l'Ammannati, non vi combina a gran pezzo: ella è non tanto, quanto quest'ultima aperta nei *fianchi*; oltre ai due punti di comune contatto all'*impostatura* ed al *colmo*, n'ha uno per parte di mutuo segamento, corrispondente all'*ordinata* XXIV^a, e poscia rialzasi e si distacca per lungo tratto sino a giungere a $\frac{2}{5}$ di braccio di divergenza, ch'è quanto dire 8 soldi; differenza troppo insigne e da non doversi rifondere nell'assestamento degli Archi dopo levatane l'*Armatura*. La supposizione contuttociò d'un' *Ellissi conica* d'intorno un settimo di *rigoglio* dovevasi tosto escludere senza bisogno di mai compararla; perchè non v'ha esempio che in Ponti di sì gran mole e portata sia sta-

(*u*) *Acta Helvetica Physico-Mathematico-Anatomico-Botanico-Medica Figuris æneis illustrata, et in usus publicos exarata. Volumen III. Basileæ. Typis et sumtibus Joh. Rudolphi Im-Hof.* Ivi alla pag. 390. *Disquisitio descriptionis cujusdam Arcus architectonici, ex qua nova eaque facillima genesis Parabolæ Apollonianæ deducitur*, sino a 396 incl.

(*v*) Riscontrisi la II. Parte della *Mémoire sur la réduction de l'épaisseur des Piles, et sur la courbure qu'il convient de donner aux Voûtes, le tout pour que l'eau puisse passer plus librement sous les Ponts* alla pag. 629, versi 18, 19 della ristampa nell'Opera prelodata [*Nota* (*q*)].

to in uso presso degli Architetti l'avventurarla con un *rigoglio* d'assai minore del terzo della sua *corda* (cioè minor della proporzione ch'han sempre seguitata gli Antichi adoperando porzioni di Cerchio, o i Moderni che usarono la Cicloide e l'Evoluta del Circolo), ed al più n'assegnarono la *ragione* tra il terzo ed il quarto; e dando a Curve consimili una compressione o scemamento maggiore, diventano questi Archi *scemi* così poco incurvati da ridursi ad essere quasi *piani* o andare in linea retta verso la *cima*. So bene che anco quegli Archi, i quali si dicono impropriamente *piani*, ed in cambio di picciolo non hanno in sostanza verun *rigoglio*, possono reggersi saldamente quantunquevolte i *cunei* (*voussoirs*) o i pezzi di pietra piramidati che compongono tali Archi, sian con tant'arte lavorati e commessi, che i profili o taglj delle lor faccie, le quali deggiono andare a contatto, vengano ad esser tutti diretti a convergere verso un sol punto (in cui s'unirebber difatto, se mai fossero prolungati a dovere); e questo punto suol collocarsi per lo più nel vertice di quel Triangolo equilatero, che averebbe l'orlo interno od esterno del dato Arco *piano* per base. Siffatti esempj però si riferiscono sempre ad Archi di poca *tesa*, e questa crescendo, hanno allora nascoso, e ad occhio fino rendon sensibile qualche poco d'incurvatura. E citando unicamente le Fabbriche di Firenze, il più mirabile a senso mio è l'Architrave di mattoni della Porta urbana S. Giorgio, e quello composto di 30 e più pezzi di macigno dentro le Sagrestie della Metropolitana, e l'Architrave un pochetto *accentinato* di 15 pezzi della Porta-maggiore della Cattedrale medesima (tutti lavori d'Arnolfo), e l'altro dell'istesso numero di parti dal lato interno delle due Porte dell'Annunziata; essendo assai men da stupirsi che sian così congegnati di tre o cinque pezzi gli Architravi delle IV Porte di S. Croce, della Porta della Badìa dei Cassinensi o Maurini, delle Porte principali del Duomo di Fiesole e delle Chiese di S. Maria Maggiore, di S. Pancrazio, di S. Felice, e di S. Maria Maddalena, e delle rimanenti VI Porte di S. Maria del Fiore, delle due Porte d'Orsanmichele col disegno del Gaddi, delle III Porte di S. Michele degli Antinori architettate da Gherardo Silvani, d'alcune dell'Ammannati che restano a livello del primo *ballatojo* del Cortile del R. Palazzo de' Pitti, e finalmente gli Architravi, Fregj, e Cornici delle Loggie

o Portici degli Uffizj disegnati da Giorgio Vasari, quattordici de' quali Architravi però s'erano di già rotti ed avcano *pelato* sin dal principio del secol caduto.

Rimaneva ora solo da confrontare col nostro Ponte le *Ovali spurie*, copiate in picciolo macchinalmente nei Tornj *a balzo* e nelle Piattaforme degli Orologj *a equazione*, ossiano gli *Ovati* composti di più Archi di varie Periferie circolari, che scambievolmente si tocchino, e così combaciandosi nei loro mutui contatti s'assomiglino ad una Curva *continua*, onde non mostrar nel contorno angolo alcuno o *stacco incontinuo*, di cui è sempre giudice l'occhio di chicchessia, comunque meno assuefatto al *Bello*, e non Disegnatore nè Artista. Egli è appunto siffatto angolo (che nel *sesto-acuto* pieno e ordinario, cioè messo in essere da due *Sestanti* di Cerchio, pareggia 120°) quel che più rende di bruttezza e disgusto negli Edificj Tedeschi al gentil genio Italiano. Nato da fisica necessità questo modo di far più acuminati, che nei Paesi di meno fredda temperatura, i *tetti* o coperte delle Capanne (e quinci gli *Archi*, i *Remenati* o *Limitari* o *Frontespizj* o *Fastigj* ec.) dei climi rigidi della Germania, ed odorando ancora i rozzi costumi degli antichi Abitanti della Selva Ercinia, così magistralmente descritti quanto lo sono nell'aurea Operetta di Tacito, e forse più indietro presane l'imitazione dal naturale intrecciamento dei rami degli Alberi nelle Foreste, dove inselvandosi i primi Popoli *nomadi* si riunivano come in Templi per onorar l'Ente Supremo e come in maestose Basiliche per assistere alle pubbliche Adunanze o Comizj, non convennero mai queste maniere esotiche di fabbricare alla Grecia, nè tampoco all'Italia. Non è tuttavia da negarsi, che per quanto straniera fosse la forma del *sesto-acuto*, e se ne conservi l'origin Germanica presso i Francesi, i quali chiamanlo andantemente *Ogive* o sivvero *Augive*, derivato dalla voce Teutonica *Aug* significante l'*Occhio*, appellando così all'angolo più risentito tra i due dei *tarsi* delle *palpebre*, nè i Monumenti dell'Agro Romano nè di Pozzuoli nè di Pesto o Possidonia nè di Pompeja presentino il minimo indizio di tali Archi o Concamerazioni nè *scoperte* nè *morte*, e Vitruvio non ne faccia parola nei suoi X Libri d'Architettura, e sembrino praticate tra noi non prima del X^mo^ secolo, ciò non ostante, malgrado l'autorità de' sommi Maestri nelle Belle-Arti Leon Batista Al-

berti ed Andrea Palladio, sussiste ancora in Toscana un Ipogèo o Sepolcreto con Olle cinerarie ec. non lunge dalla soppressa Badìa di S. Antimo a 5 miglia di distanza da Montalcino, scavato nel tufo con Arco Gotico di sveltissima proporzione, che si crede dal comune degli Antiquarj lavoro dei tempi Etruschi. Ma sopra questo argomento rimettendomi a ciò, che ne scrissero il Frisi in un suo breve Opuscolo concernente l'Architettura detta dei Goti (*x*) e più ampiamente e col corredo d'ogni dottrina geometrico-statica l'Young nel Tomo III della Reale Accademia d'Irlanda per l'anno M. DCC. LXXXIX stampato consecutivamente a Dublino (*y*), ove opina che lo stile de' Sassoni nel fabbricare fosse grave, saldo, robusto o *rustico* come il Toscano, quel dei Normanni simile al Dorico ed Jonico, e l'ultimo, che si ammira qual Gotico non depravato, più gentile ed ardito del Corintio e Composito, mi farò ad osservare che a differenza dell'*Ellissi* conica, descrittibile colla massima facilità per qualunquevogliasi *freccia* o *rigoglio* col *similmente* dividere, se non altro, le *ordinate* del Semicircolo in ogni possibil *ragione* (al che ognun vede che tende la costruzione datane da Ferdinando Galli Bibbiena al Num.° XLIV della Parte I.ª pag. 15 Fig.ª 15 della sua *Architettura Civile* divulgata in Parma nel M. DCC. XI) non vale il discorso medesimo in proposito degli altri *Ovati*, le cui descrizioni pratiche s'insegnano nei Ginnasj e nei Libri degli Architetti. Imperciocchè o con due o con tre o con quattro ec. Cerchj si delineino in sulla carta le *Ovali*, o si prenda regola per tracciarle di miglior gusto dai metodi che dettarono Mauduit e Bossut, il primo nelle sue *Lezioni di Geometria* edizion di Parigi del M. DCC. LXXIII, e precisamente nel *Supplemento* (pag. 345 e segg.) dove in diversi Problemi appalesa il modo di circoscriverle col *compasso* a tre, a cinque, ed a sette *centri*, conforme avea per l'avanti esposto Camus, l'altro nel

---

(*x*) „ Saggio sopra l'Architettura Go- „ tica ec. M. DCC. LXVI. Per Marco Col- „ tellini — Livorno — „ (in 8.°). Nel Tomo III dell'Opera anonima (di Grosley) intitolata *Londres* (Neuchatel M. DCC. LXXI) leggasi alle pagg. 66, 67, 68, ed alla *Nota* (*l*) il giudizio non favorevole brevemente datone dall'Autore.

(*y*) *The Transactions of the Royal Irish Academy etc. Dublin.* M. DCC. XC. Nominatamente alla pag. 55 della prima numerazione — *The Origin and Theory of the Gothic Arch etc. Read Nov.* 7, 1789, sino incl. ad 87.

Volume II° del *Corso di Matematica* ivi parimenti stampato l'anno M. DCC. LXXXI, in fondo del quale descrive la maniera più acconcia di costruirle a tre *centri*; tutte queste costruzioni diverse, partendo da quella dei tre Triangoli equilateri, conducono sempre ad un *rigoglio* d'assai superiore al settimo della *corda*. Non manca, egli è vero, alla Sintesi elementare Geometrica la maniera semplice e chiara d'eseguire un modello d'*Ovato*, di cui siano date a piacimento le due lunghezze di *corda* e *rigoglio* (*z*). Se, per esempio, si domandasse l'*Ovale* a tre *centri*, e fosse AB [Tav. II^a Fig.^a (H)] la metà della *corda*, BC tutta la *freccia* o *rigoglio*, congiunta la retta AC, e staccata da A l'altra retta AF di tal maniera che l'angolo $CAF = \frac{ACB}{2}$, e da C la retta CE che faccia l'angolo $ACE = \frac{BAC}{2}$, e quindi dal punto d'incontro D condotta la DI perpendicolare ad AC *ipotenusa*, e prolungatala sino ad intersecare AB in S e la protrazione di CB in O, saranno i punti così determinati S, O li due *centri* dell'*Ovale* cercata. Tal conseguenza deriva dall'ovvia notizia che a motivo dei due Triangoli rettangoli ABC, AID, e per la costruzione passata, l'angolo $DAS = SAI + IAD = 90° - ACB + \frac{ACB}{2} = 90° - \frac{ACB}{2}$, come $ADI = 90° - \frac{ACB}{2}$, e però DAS = ADS, e SA = SD: di più in seguito della costruzione medesima e dei Triangoli parimente ortogonj ABC, CID, l'angolo $DCB = ACB + \frac{BAC}{2} = 90° - BAC + \frac{BAC}{2} = 90° - \frac{BAC}{2}$, come CDI ancor esso $= 90° - \frac{BAC}{2}$, laonde DCO = CDO, e per conseguente OD = OC; dal qual complesso dei due Triangoli *isosceli* ossiano equicruri ASD, DOC nasce tosto la prova della verità dell'assunto. Ciò premesso, ben poco vi vuole a convincersi, che a proporzione che scemi il *rigoglio* e si faccia parte sempre più picciola del-

(*z*) Leggasi il modo *grafico* adoperato da Hupeau nell'Opera *sopra i Ponti* di Perronèt alla pag. 151, Figure 1 e 3 della Tavola XXIII dell'*Atlante*; qual modo è assai differente dal notato qui sotto.

la metà della *corda*, si diminuisce viamaggiormente il raggio SA del prim'Arco circolare AMD sull'*impostatura*, e cresce per il contrario l'altro raggio DO dell'Arco di Circolo, che va sino al *colmo*, DNC; talmente che trapassato un certo *limite* di rapporto, vengono ad essere *Ovati* di simil sorte ineleganti alla vista, perchè troppo saltuarj in D a causa del cangiamento rapido e risentito del grado di *curvatura*, poco aperti nei *fianchi*, quasi pianeggianti nel rimanente, e vale a dire men resistenti e sicuri. A correggere questo difetto, specialmente nel concreto dei Ponti, accorsero i più moderni Architetti, e si distinsero e segnalaron tra gli altri i Francesi, e nominatamente sopra tutti Meunier, Calais, Chezy, Soyer, ed in ultimo Perronet, i quali *centinando* gli Archi da lor modellati in guisa d'*Oval policentrica* combinarono a un tempo col buon gusto architettonico, che abborrisce ogni salto non ben digradato, e col riposo o contentamento dell'occhio la necessaria saldezza. Non impertanto io sono d'avviso che l'Ammannati in accorgimento li superasse, quantunque vissuto due secoli avanti; lo che evidentissimo parmi in virtù del paralello seguente.

Adottò il nostro valente Architetto la massima d'un *Ovato* a più di tre *centri*, ma tenne fermo quanto potè il comun metodo pratico di partirsi, per disegnarlo, da Triangoli equilateri; ed in una *corda* sì estesa, qual era quella di braccia 50, atteso il *rigoglio* scarsissimo ch'ei volea dar al Ponte onde sveltirlo sopr'alte *Pile* nè renderne ripidissime le *montate*, non fidandosi d'un Arco andante circolare nel mezzo, poichè riescendo troppo poco incurvato temeva a ragione che ne soffrisse la sua robustezza, compose la *Centina* di due mezze *Ovali* troncate nel *colmo* e delineate mediante tre *centri* per ciascheduna, che vale a dire a sei *centri* rispetto alla *Centina* intera, con ripeterla *simile* negli altri due Archi di 45 braccia di *corda*, affine di conservare l'unità del carattere di quella Fabbrica singolare. Replicate nella Figura (K) della Tavola IIIª le misure medesime della (G) disegnata nella Tavola precedente, e soltanto ridotte a minore *scala* di proporzione ed all'orlo esteriore della *ghiera* dell'Arco, tentando e ritentando ho ricavato la regola seguitata dall'Ammannati a quest'uopo, e generalmente taciuta. Esso divise la *corda* dell'*Arco* interiore in 16 parti eguali, cioè in 8 la *semicorda*, ch'essendo di 25 braccia

cia

cia ognun vede come ciascuna di quelle parti valeva 3 braccia e $\frac{1}{8}$ precisamente. Con questa parte *aliquota* assunta qual unità di misura egli dispose il sistema di tutta la *grafica* operazione ideata. Perocchè su i rimanenti $\frac{7}{8}$ dell'una e dell'altra metà della *corda* descrisse col *compasso* due Triangoli equilateri, e congiuntine i vertici loro con una retta intermedia, ch'è di lunghezza equipollente ai medesimi $\frac{7}{8}$ di *semicorda*, su questa impiantò un terzo Triangolo equilatero eguale ai due primi, colla punta parimenti voltata all'ingiù, che unito ai due lati de' superiori veniva così a chiudere un Rombo (*Losange*) di $\frac{7}{8}$ di *semicorda* per ogni verso, non meno che per la minor *diagonale*. Fatto ciò, e prolungata inferiormente la maggior diagonale del Rombo predetto sino a tanto che il suo prolungamento eguagliasse presso a poco la *somma* della diagonale medesima e dell'immaginato *rigoglio*, combinò questo punto estremo in maniera che tutte le porzioni di Circolo da segnarsi avessero *raggj* commensurabili tra di loro, e per misura comune quel primo $\frac{1}{8}$ di *semicorda*, di già stabilito come *campione* o *modulo* fondamentale di tutta insieme la *Centina*. Al quale effetto fissò il I.mo *centro* all'estremo del primo *ottavo* di *semicorda*, il II.do alla punta del primo Triangolo equilatero, con limitare la descrizione dell'Arco ad un *raggio* che passasse pel punto dei tre *ottavi* della *semicorda* medesima; ed il III.zo *centro* lo pose talmente fuor del *cateto*, che tra i due III.zi *centri* vi corresse appunto l'intervallo di tre *ottavi* di *semicorda*, quanti appunto ne tagliava da questa il secondo *raggio*; e la distanza dal II.do al III.zo *centro* fosse la *somma* dei cinque *ottavi* rimanenti della *semicorda* e di tutta la *corda*, e vale a dire *ottavi* ventuno. E tanto si tenne l'Architetto attaccato alla parte *aliquota* suddivisata ch'ei determinò anco la grossezza della Volta o almen della *ghiera* dell'Arco eguale in circa alla metà dell'*ottavo* della *semicorda* predetta. Anzi l'istessa *frazione* $\frac{1}{8}$ mirabilmente ricorre eziandio nelle *bracciature*; poichè il *raggio* del minor arco di Circolo, che nasce all'*impostatura* del Ponte è di braccia Fiorentine $3\frac{1}{8}$; il *raggio* dell'arco intermedio, che *tocca* il primo e pareggia appunto in virtù della costruzione la *semicorda*, è di braccia 25; ed ha braccia 90 $\frac{5}{8}$ il terzo e maggior *raggio* dell'ultim'arco, che *tocca* il secondo e resta troncato nel *colmo*. In riguardo alla dimensione respettiva degli Archi il mi-

nimo, quanto al *raggio*, o sivvero l'angolo al primo *centro* è di 60°; il medio ossia l'angolo al secondo *centro* è di 16° 6′ 7″ 37‴; il massimo di *raggio* o l'angolo al terzo *centro* è di 10° 53′ 2″ 0‴; e finalmente l'angolo fatto dai due Archi, i quali s'incontran nel *colmo*, e vale a dire dalle rette loro *tangenti*, ha la misura di 174° 4′ 12″ 46‴, laonde il di lui *supplemento* o differenza da due angoli retti (180°) è di 5° 55′ 47″ 14‴, cioè di poco men di 6 *gradi*. S'affaccia subito all'occhio questo difetto, avvengachè di *sesto-acuto* assai *scemo*, guardando il Disegno della *Centina* fin qui spiegata; e facilmente si scopre anco dai meno addestrati in materia di Fabbriche adagiandosi in un barchetto ed entrando sotto il Voltone del Ponte, nel cui *colmo* o *serraglio* andante, guardando di sottinsù, apparisce il solchetto od incavatura angolare; forse più manifesta che negli Archi del Ponte alla Carraja (ov'è men sensibile che nell'altro superiore elevatosi a tempo di Messer Rubaconte della Casa Mandella di Milano, allora Potestà di Firenze), e di certo più vistosa di quella che si suppone nell' Arco unico del Ponte d'Orcia di 40 braccia $\frac{1}{2}$ di *corda* e 18 $\frac{1}{3}$ di *rigoglio*, fabbricato nel M. DC. XCVII dopo rovinatone uno più antico l'anno M. DC. XLIII, in continuazione della strada Consolare Romana della Provincia-Superiore dello Stato di Siena.

Per dare una riprova patente della picciolezza del *rigoglio* in quest'Arco, di cui l'Ammannati segnò la *Centina* nell'antico Teatro Mediceo o Salone de' XIII Magistrati, lungo braccia 93, largo 35, che resta sopra le Camere del soppresso Uffizio dei IX Conservatori del Dominio Fiorentino, basterà dire che, mentre la mezza *corda* è 25 braccia, il *perimetro* del mezz'Arco interiore del Ponte gira braccia 29, cioè tante braccia quanti *ottavi* di *semicorda* compongono esattamente la lunghezza del maggior *raggio*.

Tutto adunque il *contorno* dell'Arco ascende a 58 braccia Fiorentine denominate *da panno*; di tal maniera che quell' istesso numero 8, il qual fu la parte *aliquota* regolatrice della *Centina* disegnata dall'Architetto, ritorna ad avvalorare l'armonica corrispondenza nell'eccesso dell'*arco* sopra la *corda*. Aggiungasi che la *freccia* (*sagitta*), contata dal *colmo* esterno dell'Arco sino alla *corda*, s'agguaglia a quei $\frac{3}{8}$ medesimi della metà della *corda*, per l'estremo punto dei quali passa il *raggio* medio o secondo, e che sono ad un tempo la

distanza frapposta ai due III^zi *centri*. E quell'intersecamento angolare dei due maggiori Archi troncati, che fa veder subito non poter dessi mai essere *parabolici*, perchè se lo fossero, avrebbero nel loro incontro una *tangente* orizzontale comune, s'allontana di poco più di $\frac{1}{4}$ di braccio dal sottoposto *arco* andante e *continuo* circolare (che sarebbe stato il V°) punteggiato nella Figura insieme colla sua *corda*, il quale venisse descritto fissando il suo *centro* nel punto di mutuo concorso dei due *raggi* maggiori. Ma comunque tenuissima sia questa interruzione della geometrica *continuità* della *centina*, la qual *continuità* tanto piace che costituisce il fondamento del Bello sì nei prodotti della Natura, come in quelli dell'Arte, torno a dir che farebbe un'odiosa impressione tostochè fosse restata scoperta all'occhio dei risguardanti; e singolarmente in Etruria, ove sorse il magnifico Ordin Toscano, su cui s'impostarono e poscia s'ingentilirono tutti gli altri Ordini d'Architettura, e dove anco nei secoli barbari e contaminati dal modo Tedesco di fabbricare si tenne per lo più fermo il *semicircolo* o *tutto-sesto* negli Edificj arcuati. Provano ciò ad evidenza le Chiese Fiorentine di S. Miniato-al-Monte, e dei Ss. Apostoli che sono di circa il M. dell'Era Volgare, omettendo il Battistero o Tempio ottagono di S. Giovanni edificato sotto il Regno di Grimoaldo successore del Re Ariperto dei Longobardi (cioè tra il DC. LXII, e DC. LXXI) ad imitazione di quello che la Regina Teodolinda avea fatto fabbricare in Monza l'anno DC. XV; la Chiesa di S. Salvatore contigua all'Episcopio ed innalzata col disegno di Lapo prima del M. CCC; la già Loggia del Grano, oggi Chiesa d'Orsanmichele di contro a S. Michele-in-Orto, disegnata da Giotto nel M. CCC. XXXVII e proseguita dal Gaddi; e soprattutto, quando i *sesti-acuti* aveano più guastate e corrotte le antiche nobili proporzioni dei Greci e Romani *Xisti* e *Palestre*, l'unica per l'ampiezza mirabile degli Archi suoi *semicircolari* Loggia elevata nella gran Piazza di Firenze da Andrea Orcagna nel M. CC. LXXXV ed il ricchissimo Tabernacolo della Madonna in Orsanmichele, opera dell'istesso Architetto, finita nel M. CCC. LIX, che nel totale importò alla Repubblica la spesa cospicua di novantaseimila Fiorini.

Esistono esempj di *corde* eguali, ed anche maggiori di quella dell'Arco di mezzo del Ponte di S. Trinita in altri Ponti antichi e moderni. Possono consultarsi a quest'uopo Leon Ba-

tista Alberti (Libro IV, Capo VI) lo Scamozzi (Parte II, Libro VIII, Capitoli XVI e XXIII), le Tavole esattissime di Gautier riportate ancora da Belidor; tralasciando di ricordare a parte il gran Ponte progettato dal Sassone Clauff in Irlanda per il Dery ed il Disegno bellissimo a stampa di quello ideato da Eustachio di S.t Far (*Pont-aux-fruits*) per un ramo della Senna a Melun di 150 piedi di *corda* in porzione di Cerchio. Ma sebben tutti arditi, e l'ultimo in specie, non però tutti appariscon pensati con tanto accorgimento, sicurezza di buon successo, e leggierezza ad un tempo delle Volte del nostro in sull'Arno, le quali sembran lavoro di getto o di ferro fuso, piuttostochè di materiali insiem cementati, come difatto lo sono. E primieramente senza escir dell'Italia giovami ricordare il bel Ponte di Spugna a Colle in Val d'Elsa disegnato da Arnolfo, che per la fattura sua singolare io parifico a quello in Genova, il quale chiamasi *di Carignano*, fabbricato nel M. DCC. XIX. Arditissimo è il Ponte di Fossombrone sopra il Metauro: egli ha una *corda* di palmi 175 Romani, colla Volta grossa 6, ed è alto 100 dalla cima del parapetto sino al fondo del Fiume, ma in *semicircolo*. Vien superato, parimenti per l'arditezza, dal Ponte di Castel Vecchio alzato nel M. CCC. LIV a Verona di tre Archi sull'Adige, il cui medio non ha meno di 142 piedi Veronesi (ossiano 150 Parigini) di *corda* quel di Rialto di Jacopo *dal Ponte* sul Canal Grande di Venezia a un sol Arco di 86; ma il primo è a porzione di Cerchio. Minacciò presto rovina, e fu abbattuto per prevenirla, l'Arco del Ponte-a-Rignano in sull'Arno sopra Firenze di 47 braccia di *corda*, ma a *sesto-acuto* risentitissimo a pari del Ponte-Vecchio di Londra; e rovinò difatto, essendo tuttavia sulle *centine*, il Ponte-a-Romito d'un Arco solo di 64 in 65 braccia di *corda* e 21 $\frac{1}{3}$ di *rigoglio* nell'antica strada Aretina alla Valle dell'Inferno non lunge da Levane; com'ebbero l'istesso infortunio una gran Volta di Ferdinando Tacca alla Villa Medicea *dell'Imperiale*, un Ponte sul Serchio che aveva un Arco di 50 braccia di *vano* e di *rigoglio* 18, i Ponti sull'Evola e di Dovadola sopra il Montone in Emilia, ed il famoso di Pisa tentato da Alessandro Bartolotti d'un Arco solo di 124 braccia di *corda*, che stando ancora sull'*armadura* e dopo fatta la spesa di venticinquemila Ducati cadde nel M. DC. XLIV, siccome il Michelini avea presagito; dimodochè combinandosi in quel tempo la guer-

ra così detta Barberina tra Urbano VIII° e Ferdinando II° porse al Torricelli e ad altri anonimi Letterati Toscani occasion di comporre alcuni Epigrammi Latini satirici, che ho copiati da un Codice cartaceo Num.° 59 della Classe VII[a] dei Mss. della Biblioteca Magliabechiana. Nè in tutta intera l'Italia vi sarebbe stato altro Ponte così straordinario e maestoso a fronte di quello, che il Bolognini dopo d'avere assistito all'elevazione di Ponti più piccioli, onde permanentemente trageттare la Secchia ed il Crostolo, impegnossi ai giorni nostri d'edificare sopra il Panàro, componendolo d'un Arco solo di 152 piedi Parigini di *corda*, 48 di *rigoglio*, e 8 di *serraglio*, in prosecuzione della nuova Via Modenese, la quale varcato l'Appennino dovea condurre a Lavenza sul Mediterraneo ai confini di Lunigiana, o sivvero alle falde dei Monti Liguri ed Apuani: ma la disavventura portò che, sebbene men grande e fornito dell'ordinario *rigoglio* d'intorno a $\frac{1}{5}$ della sua *corda*, tuttavolta egli avesse l'istessa sorte sinistra del già indicato del Bartolotti.

Sul proposito del *rigoglio*, il quale debba pareggiar presso a poco la terza parte della *corda* d'un Arco, che i Francesi appellano *surbaissé* e gli Italiani *scemo*, torna in acconcio qui riferire un'osservazione, importantissima a mio giudizio, che ho fatta. Stando a questa tal proporzione tra *corda* e *rigoglio*, ch'è quella adottata dal Palladio nei suoi Disegni, oltre agli antichi Architetti di Roma ne'Ponti di Vicenza, di Padova, di Salamanca, d'Alcantara, ed usatasi anco negli altri di Valenza delle Spagne e di Norimberga, tutti in porzione di Cerchio, non sarà discaro sapere, ch'è indifferente allora lo scegliere piuttosto una che un'altra forma di *Centina ovale*. Imperciocchè tagliati in cartone i piccioli *modini* di IV mezzi *Ovati* della proporzione suddetta tra il maggior *asse* ed il *semiasse* minore, cioè l'Ellissi conica; l'Ovale a III *centri* descritta per mezzo di Triangoli equilateri, come al Ponte di Cravant sopra l'Yonne di 60 piedi di *corda* (*w*); l'altra delineata con IX *centri* mediante un *flessilineo* a foggia d'*Evoluta*, segnato come per via di *tangenti* descriverebbesi un *Poligono* cir-

(*w*) È disegnata questa *Ovale* nella Tavola LXVII dell'*Opera* che rammentammo (*q*) di Perronet.

coscritto ad un arco o porzion di Parabola; e finalmente l'Ovato, ancor esso a IX *centri*, costrutto incirca secondo la Regola di Perronet per gli XI *centri*, della quale favellerò poco sotto; tutti questi *modini* in somma quasi perfettamente combaciansi. Il secondo apresi poco più del primo dall'*impostatura* sui i *piè-diritti* sino a mezzo-quadrante dell'Ovato, avanzando verso del *colmo*; il terzo pochissimo più del secondo da mezzo-quadrante in-poi; il quarto differisce appena dal terzo, slargandosi tenuemente ne'suoi due fianchi: ma le differenze sono in generale sì lievi, che bisogna esser ben avveduti per distinguerle e valutarle.

Tra i Ponti moderni delle Gallie se ne contano alcuni di molta celebrità, sì per la grandezza dei loro *Archi*, sì per la leggiadrìa della *Curva*. Oltre al Ponte di Blois disegnato da Gabriel, gli *archi* laterali del quale hanno 66 e 72 piedi di *corda* e quello di mezzo 82, ed al più recente di Trudaine fatto a Saumur di tre *archi* eguali, ognuno di piedi 90, vantavasi come unico nella sua specie il Ponte di Vielle-Brioude fabbricato nel M. CCCC. LIV d'un *arco* solo di 172 piedi di *corda*, superiore cioè a quella del Ponte di Melün parimente d'un *arco* di piedi 150 (Tav. L. dell'*Opera* prelodata), e si celebrava l'*arco* di mezzo del Ponte di Moulins sull'Allièr, ideato da Mansard e ricostruito da Regemorte, perchè aveva 138 piedi di *corda*, e ciascuno degli altri due 105; ma nel M. DCC. X s'aperse, e malgrado la grossezza di 32 piedi delle sue *Pile* andò tutto in rovina. La fama di questo bel Ponte e dell'altro di Hupeau con tre *Archi* di 120 e 108 piedi di *corda* innalzato nella Città di Mantes in un vaghissimo punto di vista tra Parigi ed il Mare, e finito nel M. DCC. LXV, stimolò Perronet, il quale poi si distinse nella direzione di parecchi Ponti minori, come nel M. DCC. LXXXII in quello di tre *Archi* eguali di 72 piedi di *corda* in S. Massenzio sull'Oise, ad edificarne uno di V *Archi*, di tutta stabilità, ed anco di maggiore eleganza a Neuillì nel M. DCC. LXVIII sopra la Senna. Il Ponte di Westminster di XV *Arcate*, principiato nel M. DCC. XXXIX e finito nel M. DCC. LI col disegno dello Svizzero Labelye del Cantone di Berna, lungo 1230 piedi Inglesi, largo 44, d'altissimi Parapetti, e colle *Pile* grosse 16 piedi, non meno che il modernissimo di Blacfreyars ossia dei Sobborghi di Londra colle *Pile* grosse 8, entrambi sopra il Tamigi, a paragone di quello sul Tay, che rinnisce due Monti scoscesi

valicando la profonda Valle intermedia, arditamente elevato dallo Scozzese Architetto Adam, non erano (dissi) composti d'*Archi* cotanto grandiosi da imporne agli spettatori; poichè quei di mezzo aveano respettivamente 72 e 92 piedi, ed il Ponte di S. Edmo a Nogent sulla Senna, terminato di chiudersi i 4 d'Ottobre del M. DCC. LXVIII e compiuto nel rimanente delle sue parti l'Anno seguente sotto la presidenza del medesimo Perronet, aveva la corda del maggior *Arco* non superiore a 90 piedi, e 27 di *rigoglio*, cioè vicino al terzo, ch'è 30, poco più che al quarto, il qual è 22 $\frac{1}{2}$ dell'istessa misura. Studiate le *Centine* di questi moderni Ponti Francesi, di Mantes, cioè, Nogent, e Neuilly, il primo dei quali incominciato sino dal M. DCC. LXIII, e l'ultimo fornito dell'*Arco* intermedio di 120 piedi di *corda*, e 30 o sivvero un quarto sol di *rigoglio*, ed unendovi come termine di paragone il sopranno-minato Ponte di Cravant, non è difficile anche a Geometra non sublime farne l'analisi, e compararne i pregj colle prerogative di quello tanto più antico, quanto lo è, architettato dall'Ammannati.

Prima d'aggiungere il Prospetto geometrico di tal analisi rilevo che il modo di congegnare o addentare le parti componenti le *Centine* degli *Archi* del Ponte di Neuilly, alle quali soprintese Chezy, è a un di presso della medesima foggia delle *fusajole* collegate da Alfonso Parigi [Fig. (F) della Tav. I^a], come apparisce in Disegno. Seconda considerazione sia quella che il Ponte della Senna a Nogent, appena fu disarmato nel M. DCC. LXIX siffattamente si mosse, che il suo *Arco* di mezzo, il qual nella *centina* od *armadura* aveva 100 piedi di *raggio*, diminuì cotanto di *curvatura*, che crebbe il *raggio* della medesima sino a 183, onde fu d'uopo soffrire che rimanesse assai deformato l'andamento delle proporzioni fissate coll'appianarsi notabilmente verso la *cima* (*aa*). Ora questa mossa o cedimento rilevante degli *Archi* dopo tolte le *Centine* in ponti *ovati* di sì gran mole non havvi maniera più valida e certa per limitarlo, quanto *troncando* i due ultimi *Archi* di Circolo tra loro eguali alla *cima*, e facendoli *eccentrici* di qua e di là

(*aa*) Pagina 611, versi 24 — 29 della *Memoria* citata di sopra (*q*), e riprodotta nell'Opera classica di Perronèt.

dal *catèto*, cosicchè il *colmo* diventi *angolare* o dolcemente piegato, come divisò l'Ammannati, o come lo discerne subito l'occhio se dal mezzo delle Piazzette, sia l'una sia l'altra, del Ponte Vecchio (ov'era l'antico *Foro Piscario*, traslatato nel M. D. LXVIII alla nuova Loggia di Mercato Vecchio con Decreto de' Capitani di Parte de' 25 Settembre insieme coll'Officine de' Beccaj, ch'esistevan sul Ponte sino dal M. CCCC. XXII, cedute poscia esclusivamente da Cosimo I° ad uso dei Giojellieri, Argentieri, ed Orefici) vada osservando con adeguato riposo l'inclinazione dei due sommi Archi *zoppi* o *rampanti* del Ponte di S. Trinita, che poi si perdono sotto l'ornato del *Cartellone*. Rifletto in ultimo luogo che il mancamento della massima parte dei Ponti, essendo quello che l'*Archivolto* o la *Ghiera* degli Archi, ossia la loro *corona* o *cornice* per adornarli, rimanga bruttamente tagliata all'*impostatura* dalle faccie degli *Squarciacqua*, non resta altro mezzo più conducente a correggerlo fuorchè il metodo inventato dall'Architetto Fiorentino, cioè d'un *Brachettone* forbito e di tale *aggetto*, che dopo girata la mezza *Ovale* da sommo ad imo prenda in pianta all'incirca quel medesimo *scorcio* od obliquità, che deggiono aver le faccie dei *Prismi* triangolari degli *Squarciacqua* predetti. Nè qui s'objetti che più grazioso sarebbe stato e d'ornamento più confacevole ai principj d'Architettura il Ponte di S. Trinita, se in cambio delle due *Pile* o *Pigne* sì grosse, quanto lo sono, di braccia 14 per ciascheduna, o sivvero d'intorno $\frac{1}{3}$ della *corda* degli Archi minori, colle faccie impiantate sopra un Triangolo equilatero, o quasi tale, vi fossero state *Pile* più sottili, e *Squarciacqua* men goffi. Infatti le *Pile* interposte a due *Archi* dell'istessa figura, e presso a poco della grandezza medesima, e perciò d'egual spinta, si sosterrebbero anco men grosse in virtù del *contrasto* mutuo delle due pari ed opposte forze; e l'ornato d'una mezza *Colonna* o tre quarti di *Colonna*, invece d'un *Prisma* acuto o tagliente, ingentilirebbe non poco e darebbe un carattere di venustà a tutto l'insieme dell'Edificatoria dei Ponti, che suol mancare nel sistema ordinario di fabbricarli. Perronet ha discusso questo punto dilicatissimo d'Architettura parziale in una sua Dissertazione eccellente, che si legge tra le *Memorie* della R. Accademia di Parigi detta delle Scienze, componenti il Volume dell'anno M. DCC. LXXVII divulgato nel M. DCC. LXXX, e l'ha eziandio riportata nell'

egregia

egregia Opera *sopra i Ponti* (*bb*). Ivi, e massimamente nel di lui Progetto d'un Ponte di VI Archi di 18, 16, e 14 *Tese* di *corda*, ed un *Levatojo* nel mezzo pel tragetto comodo dei Vascelli, da fabbricarsi a Pietroburgo sopra la Neva (*cc*), ha saputo prescrivere non solo l'ornativa architettonica più sensata, rotondando le faccie ed il taglio ingordo delle *Pile*, acuminate senza bisogno dalla parte dell'egresso dell'acqua, come avea immaginato nel costruire il Ponte d'Orleans (Tav. XXXVIII e segg.) di IX Arcate sopra la Loira sino dal M. DCC. LI, non men che nell'altro Progetto (Tav. XLVII) d'un Ponte di V Archi di 88, 80, e 72 piedi di *corda* rimpetto alla Piazza di Luigi XV, ma oltracciò attenuandole e piramidandole con ingegnoso artificio dal lato opposto dell'ingresso dell'acqua non ha lasciato di renderle capaci d'opporre una valida resistenza contra l'urto ed accumulazione dei ghiacci che stringono i Fiumi, e nel digèlo diventano montagne natanti in quei ventosi e freddissimi Climi del Settentrione Europèo. Nè adesso s'intende di favellare di quelle straordinarie altissime *Pile*, che la località renda indispensabili per l'edificazione d'un Ponte, come racconta Bergier (*dd*) del rinomato di XX Arcate, ciascuna di 170 piedi di *corda*, fatto elevar da Trajano sull'Istro o Danubio, e degli altri summentovati di Salamanca ed Alcantara, i cui *Piè-diritti* grossi 10 *Tese* erano tra i 150 e 200 piedi Parigini d'altezza, o il desiderio di maggior gloria abbia aggradito di farle credere necessarie siccome è accaduto della *Pila* torreggiante che regge i due *Archi* del suddescritto Ponte sul Sestajone, Influente della Lima, e questa del Serchio, laddove con picciol *Arco*, unico, facile, e senza verun' Arcata di compenso per sostener le *montate*, sarebbesi conseguito adeguatamente il medesimo fine. Ma avvicinandoci al nostro assunto, se l'Ammannati prendeva norma dagli esempj lasciatici nei vetusti Ponti degli Architetti Romani, n'aveva

(*bb*) *Description des projets et de la construction des Ponts de Neuilli, de Mantes, d'Orléans, de Louis XVI, etc. Par M.r Perronet (Jean-Rodolphe). Nouvelle Edition. Pour servir de complément à la nouvelle Architecture Hydraulique. De l'Imprimerie de François-Ambroise Didot. A Paris* M. DCC. LXXXVIII. (in 4.° grande con un *Atlante* in foglio massimo, ch'è l'istesso dell'Edizione del M. DCC. LXXXII.

(*cc*) Tav. XXXV, Op. prec.

(*dd*) Tomo II, pag. 288 e segg. *Des Ponts et Chemins etc. A Paris* 1721-1728.

un da osservare superstite a Rimini, tra gli altri de' tempi d'Augusto, verso la foce della Marecchia, ove questo Fiume già detto *Arimino* fa Porto sboccando nell'Adriatico, qual Ponte si denomina oggi di S. Giuliano, e fu compiuto regnando Tiberio. Eppure le *Pile*, copiose d'ornati e perfino di nicchie e di statue (ornativa, e specialmente delle colonne-binate, imitata nel moderno Ponte di Westminster), non hanno men di grossezza della metà delle *corde* degli Archi. Diminuironsi a grado a grado nell'età posteriori queste grossezze, ed il precitato Ponte del Danubio ai confini della Dacia o Transilvania non l'ebbe che grosse (le *Pile*) intorno a $\frac{1}{3}$ delle *corde* degli Archi; poscia dal terzo discesero verso il quarto delle medesime nei Ponti d'epoca più moderna, ed in processo di tempo sino a $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$, ec. rispetto alle *corde* degli Archi maggiori. Tal gradazione la riscontriamo osservando il Ponte Vecchio di Firenze, le di cui *Pile* sono tra il quarto ed il quinto; e venendo ai Ponti di Moulins, di Saumur, e di Cher (tutti col *rigoglio* di $\frac{1}{3}$) nei quali le *Pile* son grosse $\frac{1}{5}$, indi ai due antichi della Città di Vicenza, di 30 piedi di *corda* e 5 (ossia $\frac{1}{6}$) di larghezza di *Pile*, al Ponte d'Orleans che l'ha un poco men larghe, ed ai vecchj Ponti della Voulte e della Bajasse sull' Allièro di 84 piedi di *corda*, 28 di *rigoglio*, e 12 di grossezza (ch'è quanto dire $\frac{1}{7}$) delle *Pile*, Perronet ha dato finalmente alle sue del Ponte celebre di Neuilly, composto come dicemmo di cinque *Arcate*, circa ad $\frac{1}{5}$; poichè ad altrettanto ragguagliano 13 piedi della loro grossezza a fronte di 120 di *corda*. Ora il Ponte di Firenze (unico per la scarsezza del suo *rigoglio*) fabbricato nell'Arno, le cui piene massime s'alzano non di rado 9 braccia sul pelo estivo dell'acque magre, tien quasi un mezzo tra tutte le preindicate misure; giacchè 14 di grossezza di *Pila* paragonato a 50 di maggior *corda* somministra un rapporto più vicino al quarto, che al terzo; ed il quarto sta in proporzione geometrica fra $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{8}$; e $\frac{14}{50}$ si discostano poco da essere il *medio* aritmetico tra $\frac{1}{2}$ ed $\frac{1}{9}$, che sarebbe $\frac{11}{36}$, più forte della ragione abbracciata dall'Ammannati, e seguitata dipoi, poco più, poco meno, dal Palladio, il Coreggio degli Architetti. Praticò questa ragione medesima Francesco Nave, Architetto Romano, se pur non la rincarò, nel disegnare il nuovo Ponte di marmo l'anno M. DC. XLVI ed innalzarlo nella Città di Pisa a tre Archi, dopo accaduta la ridetta

rovina di quello del Bartolotti, che da costui per l'avanti andavasi predicando come *l'ottava Maraviglia del Mondo*. Tanto il Ponte del Nave, quanto quello dell'Ammannati sussistono ancora illesi malgrado l'ingiuria del tempo ed il tormento di tante escrescenze e straordinarj diluvj, quanti rispetto al primo sono sopravvenuti nel lungo corso di più d'un secolo e mezzo, e rispetto al secondo d'oltre a due secoli interi, laddovecchè corre voce per il contrario che il Ponte di Neuilli, la cui fabbrica conta poco più d'un trentennio, abbia non leggiermente sofferto. In Edificj di simil sorte giova sempre d'avere in veduta la loro perpetuità, ed ecceder piuttosto che scarseggiare nelle misure delle *Pile* e mezze-*Pile* (*Culées*), non meno che nella scelta ed uso delle pietre e dei marmi, e nel modo di ben conventarli e *ammorsarli*. Imperciocchè senza dire, che i Ponti sono gli unici mezzi di facile e spedita comunicazione tra Popoli, che la Natura terrebbe mediante l'acqua divisi, e perciò privi di commerciare sollecitamente come in Terraferma l'un l'altro, il restauro o rovina di tali fabbriche, per lo più costosissime, aggrava tutte le classi dei Cittadini; essendo caso ben infrequente che sian dessi l'opera d'un ricco Particolare, siccome lo fu a spese d'Ugo Clipton in Inghilterra il Ponte di pietra di XIV Archi alzato sul Fiume d'Avon a Stratfort nella Contea di Warwik, ed alcuni tra Londra ed Oxford, e specialmente quello di Walton sopra il Tamigi, *ære proprio* fatti edificare da Diker.

Passo adesso al proposito delle *Ovali* comuni a più *centri* prendendo dalla semplicissima cominciamento, ch'è quella dipendente da tre Triangoli equilateri per la ricerca de'*centri*, ed affinchè più mentisse o larvasse la *continuità*, perfezionata dipoi da Bossut nell'assegnarne i tre punti *centrali* col combinar le lunghezze dei due *raggi* in maniera, che nel passaggio dalla *curvatura* d'un Arco all'altra del suo contiguo la differenza loro fosse la *minima* delle possibili. A questo segno di precisione geometrica, che porta anco seco la compiacenza dell'occhio, non giunse l'Artista che soprintese al ridetto Ponte di Cravant sul Yonne: imperocchè seguitando la regola ordinaria, per *centinare* il mezz'*Ovato*, cui volea dare 60 piedi di *corda*, e 20 (cioè un terzo esattissimo) di *rigoglio*, colla condizione di più che tutti tre gli Archi fosser *sestanti* di Circolo, elesse qual *modulo* il *rigoglio* summentovato, laddove

più comoda riescirebbe la *corda* nel modo seguente. — „ Di- „ vidasi in XV parti eguali la *corda* data dell'Arco; IV di „ queste son la misura del *raggio* minore, e le rimanenti XI „ del maggiore: oltracciò il *perimetro* del mezz'*Ovato* val pres- „ so a poco $\frac{4}{3}$ della sua *corda*, o sivvero pareggia all'incirca „ la somma della *corda* e *rigoglio* „ —, d'onde deducesi im- mantinenti la dimensione, o come chiamasi volgarmente *ri- quadratura* di tutta la *Volta*, eccetto il caso degli Archi *in iscorcio* (*en bicis*), come quello del Ponte sul Bicherèt presso Lagny in obbliquità di 45° (*ee*), poichè questi esigono la dot- trina dei Cilindri *scaleni*.

Son nell'*Ovale* di cinque *centri* distribuiti talmente gli *angoli*, e così graduati i *raggi*, che volendone disegnato il so- lo *semiperimetro*, i due archi estremi posanti sopra le *impo- stature* hanno *angoli*, i quali spettano anch'essi a Triangoli equilateri, del valore cioè di 60°, i due consecutivi ciascuno di 15°, e l'intermedio di 30°, onde in tutti compongono, sic- come deggiono sempre, due *retti*, e dipendono ognuno dal Triangolo solo equilatero, col dividersi per metà, e di nuovo nel mezzo un dei tre speciali suoi *angoli*.

Più complicata è la descrizione dell'*Ovale* di sette *centri*; e tra le infinite diverse possibili combinazioni o sistemi se ne prescelgono tre particolari e più ovvie rispetto agli *archi* ed ai *raggi*, onde segnarne la metà del contorno. — I.° All'*im- postature* due *archi* di 40°, i due a contatto di 20°, i seguenti di 15°, ed il medio di 30°. — II.° L'*arco* medio di 45°, e ciascuno de' VI rimanenti di $22\frac{1}{2}$; tutti dipendenti perciò dal- la bisezione e quadrisezione d'un *angolo* retto. III.° Fermi stanti i due estremi di 40°, come nel I.°, ognuno dei V in- termedj di 20° —. Meno vaga delle due precedenti riesce al- la vista l'ultima Curva; e gli *angoli* di 40° e di 20°, come ognun sa, dipendono dall'Enneagono. In ciascuno di quei si- stemi è agevolissima la riprova, dedotta dalla *somma* degli *an- goli* costantemente eguale a 180°; lo che gli verifica a vicen- da, e n'assicura la geometrica simultanea esistenza. Nulla può aggiugnersi all'elegante Sintesi adoperata per quest'effetto da Mauduit nelle sue *Prelezioni* citate, ove scioglie VIII varj Pro-

(*ee*) Perronet Op. cit. alla pag. 190.

blemi, che si referiscono alle Figure della XIII.ma ed ultima Tavola. È degno unicamente di riflessione che differenti in ciò gli altri due dal II.do sistema, il quale esclude del tutto il Triangolo equilatero, o il *sestante* di Cerchio, che campeggia negli *Ovati* a tre e cinque *centri*, ritorna l'istesso Triangolo con armonìa mirabile a comparire, ma in ordin diverso nel I.mo e nel III.zo — „ Rispetto al I.° ed al III.° sistema, „ protratti di fatto i secondi *raggi*, risulta sempre un Trian- „ golo equilatero, ch'è impostato sulla porzion della *corda* „ frapposta ai due *raggi* medesimi appartenenti agli *archi* con- „ secutivi a quelli, i quali s'alzano sopra i *Piè-diritti* o sulle „ due *impostature*. „ —.

Le *Ovali* poi descrittibili per mezzo di IX *centri* (e l'istesso ragionamento apertamente comprende ancor l'altre di XI) o desumono il *modulo* da una parte *aliquota* del *rigoglio*, che fu un diciassettesimo in rapporto alla *Centina* del Ponte di Nogent, o piuttosto da una parte *aliquota* della *corda*, che fu il trentottesimo rispetto a quel Ponte di Neuilly situato presso dei *Campi Elisj*. Salva contuttociò l'eleganza, non meno che la saldezza della prima *Ovale* di 90 piedi di *corda*, se ne può molto facilitare dentro i limiti di leggierissime differenze la descrizione. Ecco il metodo, che mi s'è tosto affacciato per la metà del *perimetro*. — „ Sia il primo o minimo „ *raggio* eguale a $\frac{1}{4}$ della *corda* ($22\frac{1}{2}$); il secondo eguale al „ primo più 3 piedi; il terzo eguale al secondo più 10 piedi; „ il quarto eguale al terzo più 17 piedi; il quinto eguale al „ quarto più 24 piedi (sempre coll'aumento di 7); e l'ulti- „ mo finalmente eguale a tutta la *corda* o sivvero ai già det- „ ti 90 piedi. Gli angoli ai rispettivi *centri* si facciano di tal „ misura, che il primo all'*imposta* sia di 30° (metà di quello „ del Triangolo equilatero), il secondo di 23° (colla progres- „ sione del medesimo 7); ed abbiasi poi l'avvertenza, che „ la *corda* dell'Arco all'*impostatura* pareggi la *corda* dell'Ar- „ co accanto al *catèto*, e così s'agguaglino separatamente tra „ loro le *corde* del II.° e del V.°, come del III.° e IV.° Arco „. —. All'*Ovato* degli XI *centri* (*ff*) si parifica quello dei IX con di-

(*ff*) Opera prelodata di Perronet, e segnatamente dalla pag. 109 sino a 113 incl. e dalla 152 sino alla 153 incl., Fig. 2 e 3 della Tavola XV, e Fig. 2 della Tavola XXIII sebben diversa di costruzione dall'altra, e finalmente Tav. LXVIII e LXIX.

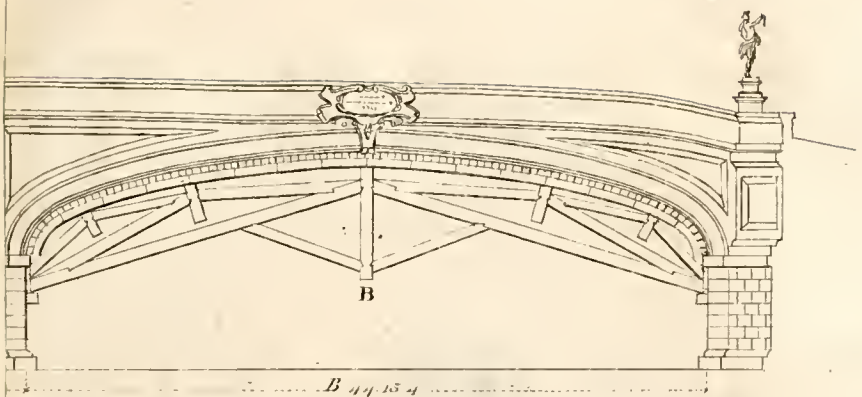
screpanza di poco momento, praticando la regola di comodissima esecuzione, che spiego in brevi parole; ed intendo adattarla al Ponte di Neuilly più volte nominato di sopra, che ha 120 piedi di *corda* e 30 di *freccia* o *rigoglio*. — „ Il *raggio* „ minimo posto ai *fianchi* sia $\frac{1}{6}$ della *corda*, cioè $\frac{10}{60}$; il secon- „ do $\frac{13}{60}$ (eguale al primo più una *Tesa* nel concreto del caso); „ il terzo con progressione aritmetica $\frac{16}{60}$ (eguale al primo più „ due *Tese*); il quarto eguale a $\frac{19}{60}$ (pari al primo più tre *Tese*); „ il quinto ed ultimo *raggio* eguale alla *somma* della *corda* e „ del *rigoglio* o sivvero a $\frac{5}{4}$ della *corda* (piedi 150); ed i pri- „ mi tre *Archi*, incominciando dal solito di 30° sopra l'*im-* „ *postatura*, abbiano quasi eguali le *corde* loro, così restando „ determinati gli *angoli* mediante la *somma* di 90° pel *semi-* „ *ovato* e l'uso familiarissimo del *Compasso* „ —.

Concludo che l'Ammannati, per *centinare* il Ponte di S. Trinita, si tenne appunto nel mezzo della Serie crescente de' numeri dispari 3, 5, 7, 9 *centri* delle porzioni di Cerchio componenti gli *Ovati* ogni volta che n'impiegò soli 6; ma ell' è poi scoperta del tutto sua quella d'aver tentato e adoperato un numero pari di *centri* e troncati i due massimi *Archi*, i quali venendo descritti con un *raggio* stragrande d'oltre a braccia 90, che torna a dire 162 piedi Parigini (e perciò maggiore del *raggio* massimo della *Centina* del Ponte di Neuilly, ch'è di piedi 150), atteso la tenuità della *curvatura*, senza il contrasto d'un angolo sarebbero stati o per indole propria, o per qualche cedimento sopravvenuto alla tolta *armatura*, soggetti a dar prova d'essere presso il *colmo* meno validi e resistenti (*gg*). Malgrado questo temperamento di Statica naturale, che traduce al *serraglio* o *chiave* dell'Arco quell'istesso difetto contrario alla venustà, che gli Antichi soffrivano senz'offesa dell'occhio su i *Piè-diritti* conformando i Ponti in porzioni di Circolo, egli seppe oltracciò destramente coprirlo perchè nulla mancasse al Bello, che dopo l'Utile e il Comodo

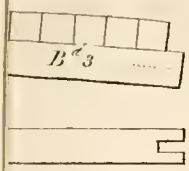
---

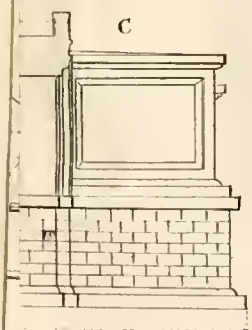
(*gg*) In virtù della picciola mossa accaduta nel Ponte, come già di sopra avvisai, hanno le *Curve* degli Archi suoi qualche leggiera irregolarità, ma più l'affacciano all'occhio addestrato i Parapetti ed i Marciapiedi. E di fatto la *cimàsa* della Spalletta intermedia mercè le replicate misure anco in ultimo prese e ben *cordeggiata* mostra sempre per la lunghezza di braccia 20 un vuoto o cavità non mai minore d'un soldo, non meno che il lastrico del Marciapiede, ove l'acqua piovana ristagna o rimpozza [*Nota* (*r*)].

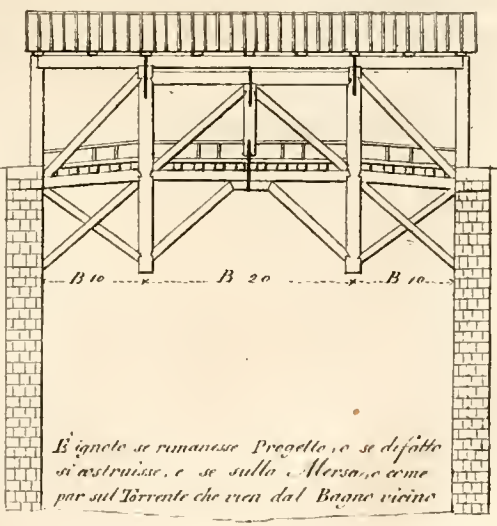
T. I


B
B 44 15 4

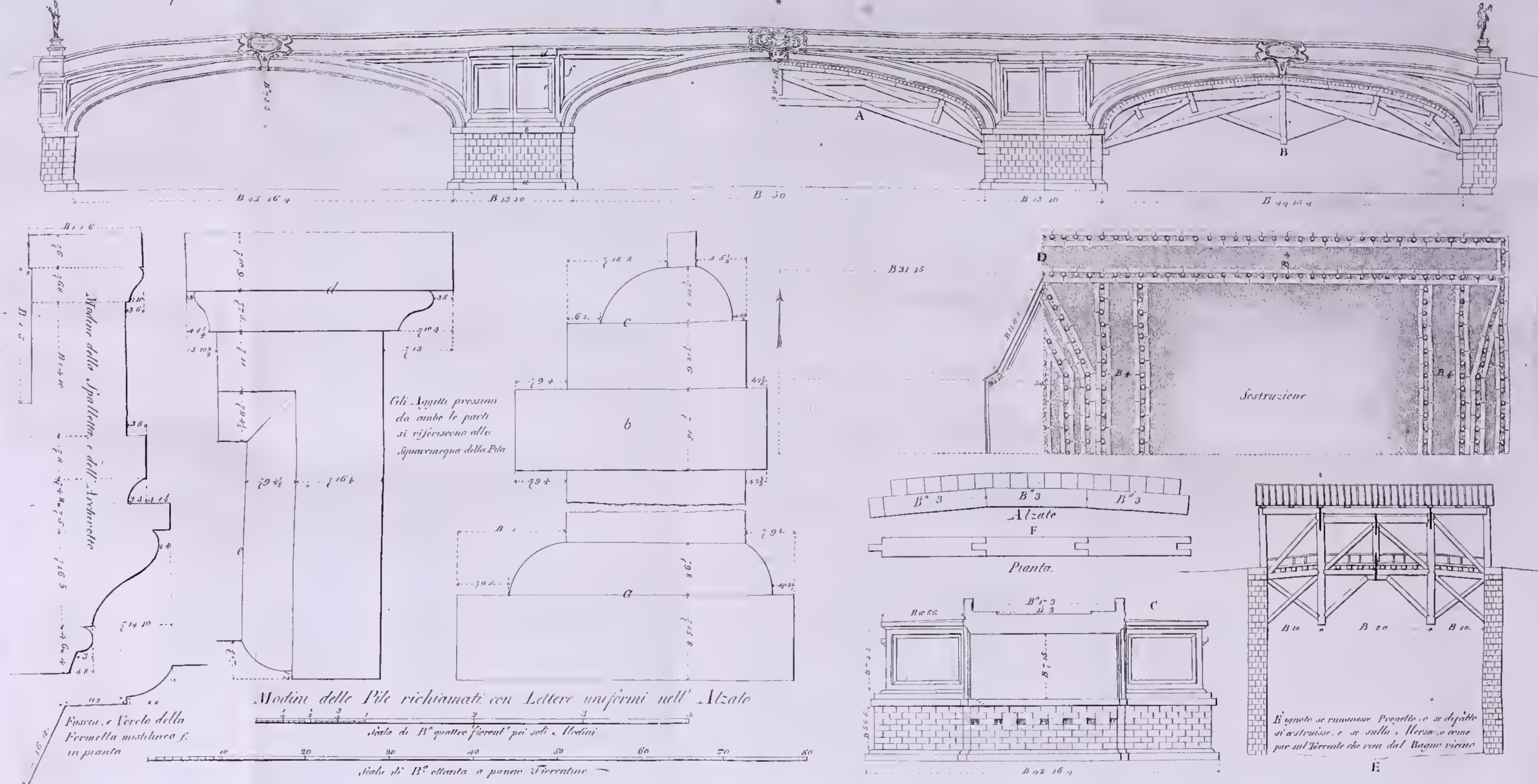
B 4
B 4
B 4
Sostruzione


B d 3

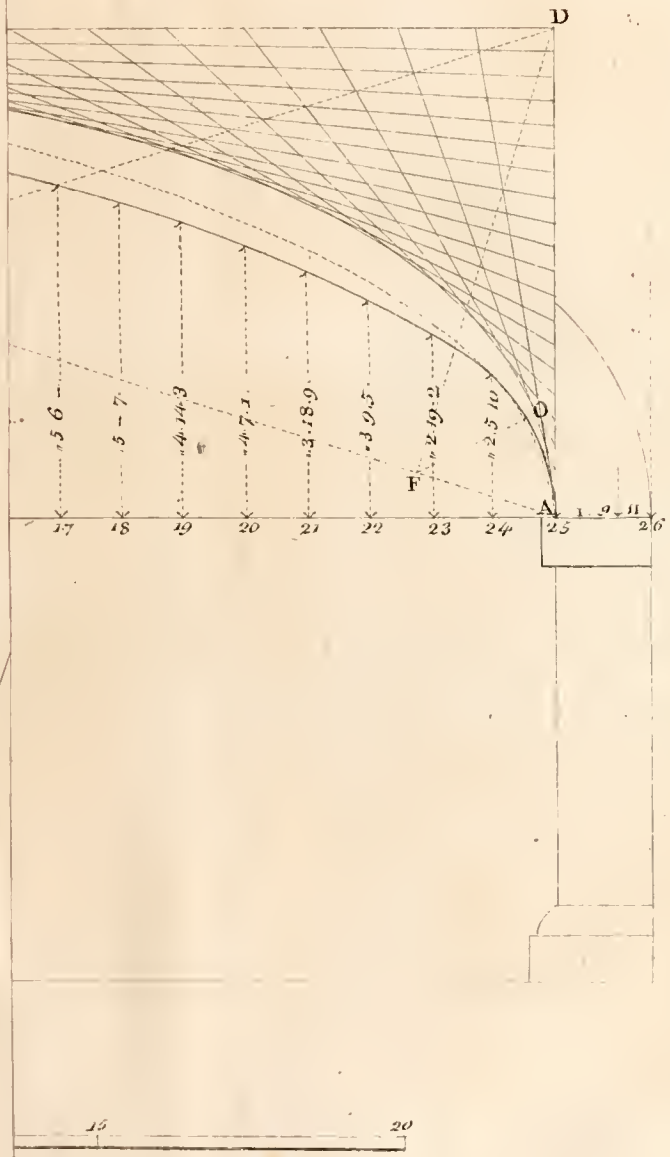

C


B 10
B 20
B 10
E' ignoto se rimanesse Progetto, o se disfatto si costruisse, e se sulla Mersa, o come par sul Torrente che vien dal Bagno vicino

E

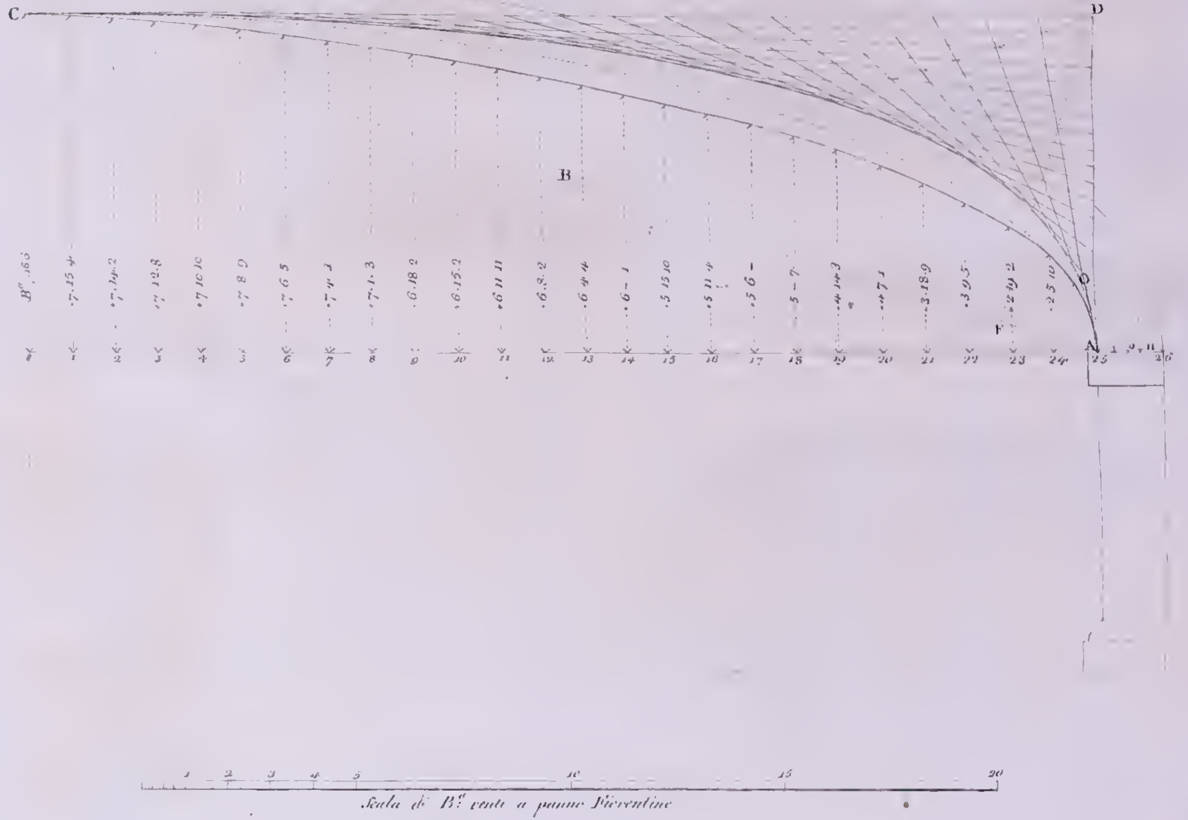

A
B
B 50
Modine della Spalletta, e dell' Archetto
Gli Aggetti pressum da ambe le parti si riferiscono allo Squarciacqua della Pila
D
Sostruzione
Alzato
F
Pianta
C
E
Modini delle Pile richiamati con Lettere uniformi nell' Alzato
Scala di B.a quattro fiorent. pei soli Modini
Scala di B.a ottanta a panno Fiorentino

T. II.


D
C
F
A
5 6 -
5 - 7
4·14·3
4·7·1
3·18·9
3·9·5
2·19·2
2·5 10
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
15
20

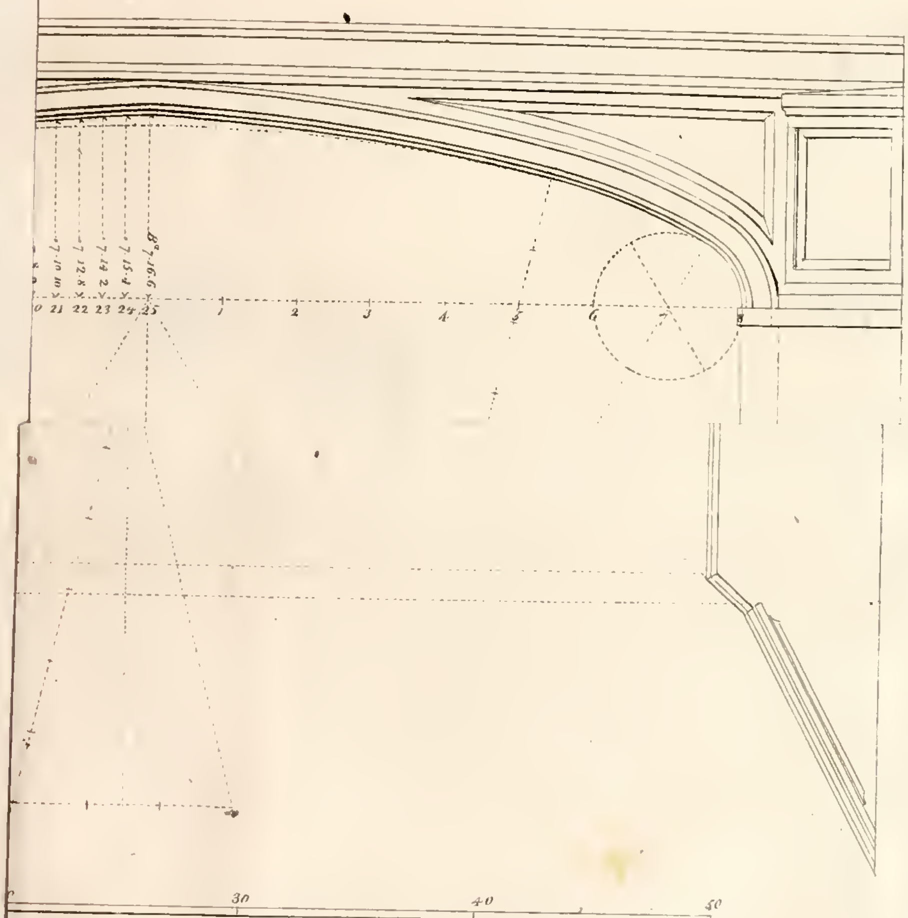
(H)

(G)



...ortare le Ordinate al Sopracc senesi condotte di nuove Corda. E' stata ancora misurata di nuovo, e perciò si ...e alla chiave e serraglio delle due mezze Semiovali troncate.

(K)



...di B^a cinquanta o panno Fiorentine

(K)

è lo scopo potissimo dell'Arte Edificatoria. E così conciliati gli opposti, nè adottato il compenso da altri Artefici suggerito di sopraggiugnervi la menzogna d'un arco-morto in porzione di Cerchio, ebbe tutto l'agio di compiacersi d'aver onorata la Patria sua colla fabbrica d'un Ponte nuovo (*hh*), che terrà sempre un posto distinto negli Annali dei Popoli civilizzati, tra i quali gli Etruschi anco prima dell'età della Storia si segnalarono, e massimamente nella cultura delle Arti Liberali d'ogni maniera, tanto mentr'erano indipendenti, quanto poscia che furono debellati e fatti sudditi di Roma antica. Fu dessa difatto, che gli distinse comunicando con loro per mezzo di due Vie Militari; la prima apertavi l'anno D. LX *ab Urbe condita* da Cajo Cassio Longino e restaurata dall'Imperatore Adriano [di cui si conserva nell'Opera di S. Maria del Fiore o della Chiesa Metropolitana di Firenze un tronco di Colonna Milliaria di travertino condotta da Monte Pulciano nel M. D. LXXXIV (*ii*)]; l'altra l'Aurelia o piuttosto l'Emilia, della quale presso alla spiaggia della Marina Toscana trovammo di là da Colle Salvetti un simile Monumento coll'Inscrizione nel piedistallo o *stilobate*, scolpita in lettere di correttissimo stile o formato grafico, — VIA . AEMILIA . A . ROMA . M. P. CLXXXIII. —.

(*hh*) „ Il Ponte di Santa Trinita a „ Firenze, rovinato da una terribil inon- „ dazione, fu rifatto dall'Ammannati „ sì nobilmente, che non si è costrut- „ to Ponte più bello dacchè si è rimes- „ sa la buona Architettura „. Elogio insigne, che non può esser sospetto, appena sappiasi il nome dell'Elogista. (*Memorie degli Architetti antichi e moderni*. Terza Edizione accresciuta e corretta dallo stesso Autore *Francesco Milizia*. Parma, dalla Stamperia Reale M. DCC. LXXXI. — Libro III.) „ Degli Archi- „ tetti dal ristabilimento dell'Architet- „ tura accaduto nel secolo XV fino al „ secolo XVIII. „ — Tomo II in 8.vo alla pag. 56.

(*ii*) Vedasi Pier Vettori, Senator Fiorentino, *Variarum Lectionum* Lib. XXXII, Cap. XII, dove narrasi diffusamente che Onofrio Panvinio ne mandò copia e disegno all'Autore, e questi al Gran Duca Francesco I.° de' Medici, ed al rinomatissimo Scrittore di cose Patrie Don Vincenzio Borghini coll'Epigrafe qui trascritto — IMP. CAESAR . DIVI . TRAIANI PARTHICI . FIL. DIVI . NERVAE . NEP. TRAIANVS . HADRIANVS . AVG. PONT. MAX. TRIB. POT. VII . COS. III . VIAM . CASSIAM VETVSTATE . COLLABSAM . A . CLVSINORVM FINIBVS . FLORENTIAM . PERDVXIT . MILLIA PASSVVM . XXCI . —

LETTERA

Al Sig. Cavaliere Antonio Cagnoli

Presidente della Societa' Italiana delle Scienze.

Del Sig. Angelo Cesaris.

Ricevuta li 24 *Aprile* 1808.

So, Sig. Presidente, che la nostra Società nel pubblicare le Memorie, che le vengono presentate per la stampa, lascia agli Autori delle medesime di essere mallevadori delle cose, che vi espongono; ma so altresì che può considerarsi come dovere dei Socj il rivenire su quelle produzioni inserite negli Atti, le quali contengano fatti ed argomenti contrarj a' fatti ed argomenti già stabiliti ed universalmente ammessi. Nè sembra perciò che gli Autori di quelle abbiano a dolersene: giacchè non offende una ragionevole critica fatta con decenza e schietta libertà. Mosso da questo principio io le dirigo, Sig. Presidente, questa Lettera: essa è veramente tutta pedestre ed in materia elementare. Ella perciò giusta la sua prudenza e sapere ne giudichi, la sopprima o la pubblichi, io la rimetto a Lei.

Nello scorrere il Tomo XIII della Società, arrivato alla Memoria intitolata *Della Rifrazione Lunare*, mi vi fermai con particolare interessamento, lusingandomi di trovarvi cosa che importasse novità e vantaggio in Astronomìa. L'atmosfera lunare controversa tra Fisici di primo ordine, le qualità dell' atmosfera medesima, nel caso ch' essa esista, il fenomeno dell' anello lucido nelle ecclissi totali del Sole, l'apparente compenetrazione delle Stelle coll' orlo della Luna nelle occultazioni delle medesime, e simili altri oggetti, associavano col titolo della Memoria, ed io mi poteva aspettare di vederveli trattati. Non li trovai però: l'argomento verte principalmente, anzi solamente, sulla diversità di rifrazione, che l'Autore crede di avere scoperta tra i raggi riflessi della Luna e quei che vengono direttamente dal Sole, e quindi generalmente tra i raggi, ch' egli chiama più deboli e più forti.

L'occa-

L'occasione che gli destò l'idea della cosa fu l'osservare l'ellitticità del Sole e della Luna all'orizzonte, ed il sembrargli, che la prima fosse minore della seconda. Ma lo sperimento fondamentale, per cui fu tratto in quella sua opinione, consiste nel presentare al lume di una candela una lente di vetro a distanze successivamente maggiori e nel riconoscere, che l'immagine della fiamma si forma nel foco a distanze successivamente minori dalla lente. Questo è il fatto, che non ammette dubbio. Ma a distanze maggiori dalla candela i raggi di luce sono più deboli, e le lunghezze minori del foco dimostrano, che i raggi soffrono una rifrazione maggiore; dunque i raggi più deboli soffrono realmente una rifrazione maggiore. Questo è il raziocinio che vacilla.

La rifrazione della luce dipende non solo dalle forze del Mezzo refringente, che agiscono su i raggi, ma dall'obbliquità ossia dall'angolo d'incidenza, sotto il quale i raggi entrano e sortono dal Mezzo refringente. Ogni Mezzo ha le sue particolari forze, ed in ogni Mezzo si osserva una costante relazione tra i seni dell'angolo d'incidenza e dell'angolo rifratto. Altronde ogni lente deve considerarsi come un segmento di sfera, la cui superficie è formata da infiniti piccoli piani così disposti, che le rette perpendicolari ai medesimi si uniscono tutte intorno all'asse di mezzo e vi si intersecano nel centro della sfera medesima. Quanto minore è il raggio della sfera, tanto maggiore ne è la curvatura della superficie e maggiore l'obbliquità de' piani rispetto all'asse. Quindi in parità di circostanze la lunghezza del foco delle lenti segue la ragione della lunghezza de' raggi delle sfere a cui appartengono. Chè se le circostanze non siano pari, o per la diversità delle forze refringenti delle sostanze di cui siano composte le lenti, o per la diversità d'inclinazione con cui i raggi di luce arrivino alla superficie delle medesime, varierà la quantità della rifrazione, e quindi la lunghezza del foco; nè si potrà però dedurre, che sia variata la qualità refrattiva de' raggi.

Ora appunto l'inclinazione ossia l'incidenza, con cui battono i raggi in una data superficie, è diversa secondo che è diversa la distanza del punto da cui sono spiccati divergendo. Considerata la lente come base di un cono luminoso, di cui il vertice è il punto radiante, quanto più la data determinata base si discosta dal vertice, tanto meno i lati del cono le

sono inclinati: i discostamenti successivi, che corrispondono agli assi successivamente crescenti di coni sempre più acuti, rappresentano le cotangenti delle inclinazioni alla base sempre minori. Quando poi la distanza del punto radiante arriva a tal segno che il diametro della lente ed il raggio di sua sfericità non vi abbiano una ragione sensibile, allora i raggi che formano il cono luminoso si reputano sensibilmente paralleli, la distanza focale rimane costante e corrisponde solo alla sfericità e qualità refringente della lente.

A questi principj della diottrica applicando gli opportuni elementi della geometria, si dimostrano le vicendevoli relazioni e le une si deducono per mezzo delle altre, la distanza dell'oggetto d, la lunghezza focale f, i raggi delle sfericità r, r', la grossezza della lente ε, la ragione delle forze refringenti $\frac{p}{q}$. L'equazione generale che ne esprime il legame, trovasi dimostrata da tutti i Trattatisti di questi argomenti, ed è rappresentata da

$$f = \frac{dpqrr' + dqq\varepsilon r' - dpq\varepsilon r' + \varepsilon qqrr'}{dppr' - dpqr' - pqrr' - d\varepsilon qq - dpqr + 2d\varepsilon pq - d\varepsilon pp + dppr - \varepsilon qqr + \varepsilon pqr}.$$

Quando i raggi passano dall'aria nel vetro, essendo la ragione $\frac{p}{q} = \frac{31}{20}$ ed altronde potendosi non curare la grossezza ε della lente, l'equazione si riduce ad $f = \frac{620\,drr'}{341\,(dr' + dr) - 620\,rr'}$. È nel caso più comune che la lente sia isoscele, onde $r = r'$, la formola diviene semplicemente $f = \frac{11d - 10r}{10dr}$.

Giusta questa formola nello sperimento dell'Autore il foco della lente, il quale determinato coi raggi solari era di pollici 6, linee 10,47 = pollici 6,87 doveva successivamente allungarsi collo sminuirsi della distanza della lente dalla candela, nella proporzione seguente.

Alla distanza di	piedi	100	Lunghezza focale pollici	6,899
di	piedi	15	. . . . . pollici	7,144
di	piedi	10	. . . . . pollici	7,288
di	piedi	6	. . . . . pollici	7,595
di	piedi	3	. . . . . pollici	8,490
di	piedi	1	. . . . . pollici	16,070

È pertanto manifesto, come anche indipendentemente da qualunque rifrangibilità diversa di raggi, variano le lunghezze focali, variando la distanza dell'oggetto dalla lente.

Dal lume della candela passa l'Autore a cimentare i raggi che vengono dal Sole e dalla Luna, confrontandone le immagini formate dopo la rifrazione. Trattandosi di cosa tanto delicata, e che, ove reggesse lo sperimento, dovrebbe posare sul fondamento che i diametri apparenti de' corpi osservati o sono perfettamente eguali o ne è conosciuta perfettamente la diversità, sembra veramente che si dovesse avvertire che il diametro lunare varia sensibilmente da un giorno all'altro per la variazione di distanza della Luna dalla terra; che nello stesso giorno varia secondo le diverse altezze della Luna sopra l'orizzonte in ragione dei coseni dell'altezza vera e dell'altezza alterata dalla parallasse: che il diametro il quale passa per le corna della fase non combina colla verticale se non in quel solo punto in cui il piano del circolo verticale è perpendicolare all'eclittica: che il diametro delle corna s'inclina all'eclittica in ragione della latitudine e della elongazione della Luna dal Sole: inoltre che il diametro medesimo in parità di circostanze si sminuisce in ragione del seno-verso della latitudine della Luna. Ma queste esattezze astronomiche non furono curate.

La medesima lente che servì all'Autore nel primo esperimento, gli serve in questo secondo. Raccoglie egli con essa i raggi, e nel foco di essa forma l'immagine del Sole sopra un cartone incollato a un legno, e colle punte di un compasso ne determina il diametro: forma similmente l'immagine della Luna e similmente ne misura il diametro. Da 25 osservazioni, le quali mirabilmente non differiscono l'una dall'altra che di poche parti centesime di linea, trova per risultato medio il diametro solare di linee 1,305; e da 30 simili osservazioni trova il diametro lunare di linee 0,850; e quindi la differenza di parti di linea 0,455 di cui è minore l'immagine della Luna di quella del Sole. „ Questa differenza, soggiun-
„ ge l'Autore, mostra apertamente, che li raggi lunari che
„ cadono lateralmente sulla lente si uniscono, e si concentra-
„ no molto di più che li raggi laterali del Sole con che si
„ viene ad ottenere un foco immaginario più corto nelle os-
„ servazioni fatte con una lente ai raggi lunari, di quello che

„ ai raggi solari, conseguentemente l'angolo che si forma nel „ detto foco immaginario alla luce della Luna è maggiore di „ quello formato coll'istessa lente ai raggi del Sole; e infatti „ trovai l'angolo solare 13° 25′, mentre il lunare collo stesso „ metodo ritrovato viene ad essere 13° 47′ piuttosto più che „ meno. Tutto questo, se non m'inganno, par che manife- „ stamente provi e di una maniera da non poter dubitare, „ che anche negli stessi mezzi, i raggi lunari come più de- „ boli s'incurvino assai più che li raggi solari, i quali (per „ così esprimermi) sono più tesi e più forti.

Ora che l'Autore ha dedotto le sue conseguenze, mi permetta ch'io pure deduca le mie. Ammessa la verità di quelle 55 osservazioni, sarebbe dunque dimostrato, che il diametro apparente del Sole sta al diametro apparente della Luna, come 130 : 85, dunque ancora nella stessa proporzione, come 32′ 0″ : 20′ 54″. Dal che risulterebbe il diametro della Luna ridotto a due terzi del diametro del Sole. Prima conseguenza. Eppure la più volgare esperienza convince chiunque guarda il Sole e la Luna piena (e guarda con occhj, che rifrangono essi pure i raggi) lo convince dico che le grandezze apparenti di questi due corpi sono prossimamente eguali: e gli Astronomi confrontandone le immagini, formate colla stessa lente obbiettiva, misurate collo stesso micrometro, contemplate colla stessa oculare non vi trovano, che le piccole differenze dovute alle corrispondenti conosciute cagioni.

Continuando nello stesso modo l'argomento ed applicandovi il canone ottico, che la distanza reale dell'oggetto sta alla grandezza reale del medesimo, come la lunghezza focale dell'immagine sta alla grandezza della medesima: e similmente che la lunghezza focale sta al semidiametro dell'immagine, come il raggio alla tangente della misura angolare del semidiametro medesimo; prendo i dati dall'Autore cioè la lunghezza focale nella sua lente di linee 82,47, ed il semidiametro dell'immagine lunare di linee 0,425; onde coll'indicata proporzione ottengo la tang. $= \frac{0,425}{82,47} = 0,0051534 =$ tang. 0° 17′ 43″: dal che risulta il diametro della Luna $=$ 35′ 26″. Seconda conseguenza. Eppure il diametro della Luna al giorno 1 di Ottobre 1805, tempo dell'osservazione, non era nè 20′ 54″, nè 35′ 26″; ma bensì 29′ 40″.

Prendo similmente il semidiametro dell'immagine solare determinato di linee 0,6525, cerco e trovo collo stesso metodo la tangente $= \frac{0,6525}{82,47} = 0,0079120 =$ tang. 0° 27′ 12″: dal che risulta il diametro del Sole 54′ 24″. Terza conseguenza. Eppure il diametro del Sole a quel giorno non era che 32′ 0″.

Procedendo ulteriormente a quegli angoli solare e lunare di 13° 25′ e di 13° 47′ formati dai raggi che *cadendo lateralmente sulla lente si concentrano meno pel Sole e più per la Luna nel foco immaginario*, confesso che non arrivo a comprendere nulla di preciso. In linguaggio ottico per foco immaginario io ho sempre inteso quel punto, in cui i raggi o riflessi da uno specchio divergenti, o rifratti similmente divergenti da una lente non concorrono realmente, ma vi concorrono le loro direzioni, che vi s'immaginano prodotte di là dello specchio e della lente. Congetturando però sulle espressioni dell'Autore potrebbe sospettarsi ch'egli formi quel suo angolo solare e lunare coi raggi che fa passare per le estremità de' diametri della lente e dell'immagine e fa intersecare in quel suo foco immaginario. Ma o si suppone che l'intersecazione abbia luogo avanti l'immagine, affinchè la medesima riesca rovesciata, e gli angoli allora risultano 16° 0′ 46″ coll'immagine della Luna, e 16° 19′ 10″ con quella del Sole: o i raggi s'intersecano dopo l'immagine e gli angoli risultano 14° 51′ 14″ per la Luna e 14° 32′ 26″ pel Sole: quantità calcolate sopra i dati dell'Autore e quantità che non combinano con quelle dell'Autore.

Ma non occorre di occuparci di congetture, quando l'Ottica ci fornisce principj certissimi. Secondo questi le grandezze delle immagini, che si ottengono colle lenti, sono determinate dagli assi o raggi principali dei coni radianti, i quali partono dai punti estremi dell'oggetto e vengono ad intersecarsi nella lente. Qualunque sia la forza refringente quegli assi o raggi principali si considerano come irrefratti, poichè nel sortire dalla lente sono piegati dalla rifrazione in direzione contraria ed eguale alla direzione, con cui furono piegati nell'entrarvi, ed indi progrediscono nella continuazione della retta stessa, con cui dall'oggetto vennero alla lente. Tutti gli altri raggi del cono lucido convergono rifratti intorno al loro asse nel foco. Da ogni punto di oggetto emana il suo co-

no lucido sopra la lente: ogni cono ha il suo asse o l'equivalente raggio principale: ogni asse ha il foco de' rispettivi raggi del suo cono: la lunghezza d'ogni foco è sensibilmente eguale per tutti i coni. Così nello spazio compreso da tutti gli assi e alla distanza corrispondente ai fochi, viene dipinta l'immagine simile all'oggetto. Essa si considera quasi base di una piramide, il cui vertice è nella lente stessa nella comune intersezione di tutti gli assi, diretti da una parte ai punti estremi dell'immagine e dall'altra parte ai punti corrispondenti dell'oggetto, il quale diviene esso pure base di una seconda piramide simile ed opposta alla prima: l'asse delle due piramidi è l'asse principale della lente prodotto.

È pertanto manifesto che la rifrazione nulla influisce nella grandezza angolare dell'immagine, e la sola estensione lineare della medesima cresce o decresce in ragione che la distanza focale si allunga, o si accorcia, per la diversa rifrazione. È facile il vedere che tali incrementi o decrementi sono come le tangenti del semidiametro dell'oggetto rispetto al raggio: quindi nell'immagine solare come la tangente di 16′ 0″ = 0,0046542 all'unità.

Se tra i raggi del Sole e della Luna esistesse la differenza di refrangibilità che esiste tra i raggi rossi e violati, essendo questa = $\frac{1}{27}$ della rifrazione totale, il foco de' raggi lunari nella lente dello sperimento = linee 82,47 doveva accorciarsi di linee 3 e più, ed il semidiametro lineare dell'immagine sminuirsi di una parte centesima di linea.

Questa sproporzione di variazioni dimostra che l'esperimento poteva farsi meglio facendolo a rovescio, coll'osservare piuttosto la variazione del foco tanto più estesa, che non la piccolissima nell'immagine: poteva adoperarsi una lente obbiettiva di sei piedi di foco e non di sei pollici per avere una maggiore estensione lineare di differenza: poteva determinarsi il foco contemplando la massima distinzione de' contorni o qualche macchia nelle immagini, con altra lente oculare che formasse un perfetto cannocchiale: poteva misurarsi la differenza de' fochi applicando un Nonnio ai tubi dell'oculare, invece di servirsi delle punte di un compasso, che sopra un cartone non possono assicurare le parti decime di linea non che le centesime: potevano esplorarsi i raggi lunari rispetto ai solari colla stessa sagacità e con gli stessi metodi, con cui fu esplo-

rata e determinata la diversa refrangibilità de' raggi solari tra loro: poteva . . . . . Ma io mi accorgo, Sig. Presidente, di oltrepassare i limiti di una Lettera, e vi metto fine. Ella gradisca i miei sentimenti ed i miei voti per l'onore della Società, e le proteste dell'antica e costante stima e rispetto che le professo.

ESPOSIZIONE
DEL VERO PRINCIPIO DIMOSTRATIVO
DELL'EQUILIBRIO

Del Sig. Ermenegildo Pini (*).

Ricevuta li 4 *Aprile* 1808.

Sino ai tempi di Daniele Bernoullio si fece uso nella Meccanica della Risoluzione e Composizione delle Forze, abbenchè dell'Equilibrio non si fosse per anco data una dimostrazione a lui compiutamente satisfacente; e ciò per le ragioni, ch'egli espose nel Tomo I dei Commentarj dell'Accademia di Pietroburgo. Quindi egli ne produsse un'altra maniera di dimostrazione a suo giudizio più esatta. Questa però anche al rinomato *d'Alembert* non sembrò *la più semplice, nè la più rigorosa:* ond' egli ne sostituì un'altra, che espose nel Tomo I de' suoi Opuscoli matematici, e ch'egli riguarda come dotata di quelle proprietà, ch' egli desiderava in quella del *Bernoullio*. Nulladimeno altre dimostrazioni sullo stesso oggetto furono in seguito da altri prodotte; e recentemente anche il sublime Sig. *Laplace* nella sua Meccanica celeste ne espose una, facendo uso del calcolo infinitesimale.

L'eguaglianza di tre potenze, o forze agenti su di loro con direzioni, che formino un angolo di 120 gradi è il principio

(*) = *Lettera dell'Autore al Presidente* = Milano 2 Marzo 1808. = La scarsezza di Memorie Sociali da Lei accusata nell'ultima sua circolare mi richiamò alla mente quella mia Memoria, che Ella stimò non poter entrare nel Volume della Società a motivo di alcuni cenni riguardati come protologici o metafisici. Io pertanto l'ho riveduta per riconoscere quali questi fossero, e se potevano essere detratti senza togliere considerabilmente la chiarezza alle dimostrazioni. Avendo pertanto veduto, che ciò poteva farsi, io li detrassi; e ridussi la Memoria a quella, che io ora le trasmetto, credendo che essa possa aumentare non il solo numero delle Memorie: giacchè avendola comunicata ad alcuni Professori di Padova, allorchè io colà mi trovava, la trovarono soddisfacente al rigore dimostrativo.

Il Presidente, rispettando l'opinione del chiariss. Socio più della propria, ha ordinato la stampa della presente Memoria.

cipio assunto dal Sig. *D'Alembert*; e quello è il vero principio costitutivo dell'equilibrio, a cui è analoga la così detta *composizione e risoluzione* delle forze; e fa maraviglia, come da tale principio, che è per sè manifesto, non abbiano cominciato a partire i primi Meccanici, e molto più, che dopo di essere stato proposto da quell'illustre Matematico, non sia stato assunto dai Meccanici seguenti. Forse di ciò la ragione si è, ch'egli in quell'Opuscolo trattò dell'equilibrio, derivando le dimostrazioni non dall'assunto principio, così che questo vi rimane come una sterile nozione, quando che esso è fecondissimo di verità. Per lo che mi è sembrato poter essere utile cosa la dichiarazione di tale principio, e l'applicazione di esso alla dimostrazione generale dell'equilibrio meccanico fatta con un metodo quanto facile, altrettanto esatto. Quale questo sia verrò esponendo nella presente Memoria, aggiugnendovi alcune riflessioni sui principj da altri usati.

1. Come principio costitutivo dell'equilibrio io assumo la seguente asserzione: tre potenze R, S, T eguali in grandezza tra loro, che nello stesso piano agiscono verso un punto C (Fig. 1) con direzioni tra loro equidistanti AC, BC, EC, sono in equilibrio, cioè sono permanenti nello stesso stato, ossia in quiete.

Il principio è manifesto non meno di qualunque assioma; e la ragione dell'evidenza altri forse deriveranno dal non esservi ragione, per cui una prevalga all'altre. Ma questa ragione è negativa, epperò non del tutto soddisfacente. La ragione positiva è, che una potenza non può prevalere alle altre, in quanto che per la funzione propria dell'eguaglianza di tre potenze ognuna delle tre dà alle altre due quello, che da esse riceve: la qual ragione sarà meglio compresa dalle cose, che in seguito esporrò.

2. L'assumere le direzioni delle potenze equidistanti tra loro è bensì lo stesso, che supporre di 120 gradi l'angolo formato dalle due prossime tra loro, allorchè si riguarda l'equilibrio espresso al senso nostro, come equilibrio da compiersi. Ma nell'equilibrio come compiuto, ossia nel suo complemento, che è in un sol punto, rimane l'eguaglianza, o anzi l'identità delle direzioni senza che v'intervenga angolo veruno.

3. Nelle tre potenze assunte l'equilibrio non dipende dalla grandezza loro, ma dalla ragione d'eguaglianza, che è sì

nella grandezza, come nella direzione loro: d'onde segue, 1.°, che ognuna di esse potrà essere espressa da qualunque retta, purchè le rette si assumano eguali, ed equidistanti tra loro; 2.°, che quando tre potenze sieno in equilibrio, anche tre altre ad esse proporzionali, e similmente disposte, quanto alle loro direzioni, saranno in equilibrio.

4. Descrivendo dal punto C come centro col raggio AC un circolo, e supponendo che le potenze in vece di agire dalla circonferenza verso il centro, agiscano dal centro verso la circonferenza, i raggi CD, CH, CZ esprimeranno le tre potenze R, S, T, e le loro direzioni.

5. Conducendo le corde AZ, AH, HE, ED, DB, BZ, e prolungando le corde AZ, AH, come pure BD, BE sino al loro concorso nei punti L, Q risulteranno quattro rombi equilateri AOCH, QOCB, BCED, CHLE, che sono tra loro eguali.

6. In ciascuno di questi rombi, come BCED, la potenza espressa dalla diagonale CD, che passa per gli angoli ottusi, è in equilibrio colle due espresse dai lati contigui BC, CE, ossia è equivalente a queste due. Perciocchè le tre R, S, T agenti verso il punto C sono in equilibrio (n.° 1.); e supponendo, che la potenza R in vece di agire dal punto A verso C agisca da C verso D, il suo effetto sulle potenze BC, CE, ossia S, T è lo stesso: onde saranno in equilibrio anche le tre BC, CE, CD.

7. La precedente costruzione presenta parimenti tre rombi ACBZ, ACEH, BCED, i quali in tutto sono eguali tra loro: onde in ciascuno la diagonale CZ, CH, che passa pei loro angoli ottusi, esprimerà una potenza equivalente alle due espresse dai lati contigui; e tali potenze rispettivamente saranno tra loro in equilibrio.

8. Poichè nel rombo BCED la diagonale CD esprime una potenza equivalente alle due BC, CE, perciò le potenze espresse dalle tre rette CD, BC, CE costituiscono quell'equilibrio, che dai Meccanici si suole considerare; ed in questo le due potenze espresse dai lati BC, CE, si potranno chiamare *Componenti*, e l'altra CD espressa dalla diagonale, potrà dirsi *Risultante*. Queste denominazioni però, che dai Meccanici si sogliono usare, non devonsi prendere in senso assoluto, quasi che la risultante non possa essere componente: poichè, come appare dalla precedente costruzione, ogni risultante può esse-

re componente, e viceversa. In fatti per esempio CH nel rombo ACEH è risultante delle due AC, CE, ed insieme è una delle componenti nel rombo DCHE: il che deriva da questo, che nell'equilibrio primo ognuna delle tre potenze non può riguardarsi come componente, nè come risultante, ma tutte e tre devonsi dire *costituenti* dell'equilibrio; ond'è che quando tre potenze sono in equilibrio, ognuna delle tre devesi dire equivalente alle altre due.

9. L'equilibrio delle potenze espresse nel rombo BCED dalla diagonale CD, e dai lati ad essa contigui, si chiamerà originario, come quello, che è immediatamente derivato dall'equilibrio primamente assunto, che dee chiamarsi equilibrio primo. Quindi originario per brevità si chiamerà ognuno dei rombi sopradescritti, ed ognuno dei triangoli rettangoli, come NCE, formati dalle diagonali CD, BC, e dai lati del rombo BCED: come pure per segno dell'equivalenza assumeremo il seguente ⊣, così che l'espressione R⊣ S, T, oppure CD⊣ BC, CE, significherà, che la potenza R, ovvero CD è equivalente alle due S, T, ovvero BC, CE.

10. E qui è da osservare, che, trasformando l'equilibrio primo nel Meccanico, conviene supporre una forza resistente nel punto C oltre alle tre costituenti l'equilibrio, cioè a dire siccome nell'equilibrio meccanico supponesi, che la forza risultante agisca in senso diverso da quello, in cui agiscono le componenti, così conviene per esempio supporre, che le due BC, CE agenti al centro C non abbiano il solo contatto delle loro estremità, ma che sieno annesse alla terza CD per mezzo di un perno inflessibile, intorno al quale possano girare, ovvero conviene supporre, che le potenze agiscano applicate a tre fili non cedevoli, e tra loro connessi nel punto C. Laddove nell'equilibrio primo tal forza resistente non è necessaria, supponendosi le potenze agenti tra loro nello stesso senso, e verso lo stesso punto.

11. Se le estremità A, B, C delle rette esprimenti le potenze AC, BC, EC si congiungono colle rette AB, BE, EA si avrà un triangolo equilatero. In esso le metà dei suoi lati saranno i seni degli angoli opposti ai lati medesimi, ossia degli angoli formati dalle direzioni delle potenze stesse; le rette CN, C*n*, C*n'* saranno i coseni degli angoli medesimi: onde nell'equilibrio primo le potenze saranno proporzionali sì ai

seni, che ai coseni indicati, cioè potranno essere espresse per gli stessi seni e coseni.

12. Quindi se tre potenze sono espresse dai lati di un triangolo equilatero come DEC si dovranno dire in equilibrio, in quanto che esse sono riducibili all'equilibrio originario: il che si ottiene compiendo su di esso un rombo, qual è BDEC.

13. Se tre potenze sono in equilibrio, come BC, CE, DC, (Fig. 2) una qualunque di esse equivale alle altre due. Imperocchè se non fosse reciproca l'equivalenza, due prevalerebbero ad una, ovvero una prevalerebbe a due: il che escluderebbe l'equilibrio.

14. Quindi le tre potenze espresse dalle rette BC, CE, DC sono in equilibrio, compiendo su una qualunque di esse come diagonale un paralellogrammo; la potenza espressa dalla diagonale equivalerà alle due espresse dai lati ad essa contigui. Imperocchè se si compie il paralellogrammo sulle tre rette date, esso sarà BCED, nel quale è manifesto, che sarà DC⊣ BC, CE, com'è per ipotesi.

15. Che se per diagonale si assume CE, il paralellogrammo si formerà prolungando BC sino in H, così che sia CH = BC, e conducendo EH paralella a DC. Ora è manifesto, che sarà CE ⊣ DC, CH. Perciocchè supponendo, che l'equilibrio fosse tra la potenza DC agente da D verso C, e le due agenti in senso diverso, cioè da C verso B, ed E, si potrà alla potenza BC sostituire la sua eguale CH, come agente da H verso C; giacchè l'azione da H verso C fa lo stesso, che l'azione da C verso B. Se dunque sono in equilibrio tra loro le tre potenze BC, CE, DC lo saranno anche le tre CH, CE, DC: onde sarà CE ⊣ DC, CH, ossia CE ⊣ DE, EH.

16. Se finalmente per diagonale si prende l'altra BC, si avrà il paralellogrammo prolungando EC sino in P, così che sia CP = CE, e conducendo BP paralella a DC. In questa costruzione la potenza PC, agendo da P verso C avrà la stessa azione, che ha CE agendo da C verso E. Per lo che essendo in equilibrio le tre BC, CE, DC, lo saranno parimenti le tre BC, PC, DC: onde sarà BC ⊣ PC, CD; ossia BC ⊣ BD, BP.

17. Nel rombo originario BCED (Fig. 1) la diagonale BE, che passa per gli angoli acuti esprime una potenza equivalente alle due espresse dai lati contigui CE, ED. Imperocchè l'equivalente alle due CE, ED, essendo queste eguali, deve

passare pel mezzo dell'angolo CED, epperò è nella direzione della diagonale EB. Ora se l'equivalente a queste non è espressa dalla diagonale stessa, suppongasi, che lo sia da un'altra o maggiore o minore di BE, e si chiami X. Se la supposta potenza X fosse veramente equivalente alle due CE, ED, le tre potenze CE, ED, X sarebbero in equilibrio, epperò (n.° 14, 15) su ciascuna delle rette esprimenti tali potenze presa per diagonale potrebbesi compiere un paralellogrammo, in cui la diagonale esprima una potenza equivalente alle due espresse dai lati contigui. Ma, posto che la potenza X sia espressa da una retta maggiore di EB, com'è EB', non può in verun modo colle rette EB', CE, ED formarsi un paralellogrammo. Lo stesso sarebbe se si supponesse X espressa da una retta minore di EB, qual sarebbe EB''. Non può pertanto una potenza X espressa da una retta maggiore, o minore della diagonale BE essere equivalente alle due CE, ED; epperò l'equivalente a queste due dee essere espressa dalla diagonale stessa BE.

E veramente se le tre potenze espresse dalle rette CE, ED, EB' fossero in equilibrio, formando un paralellogrammo ECQ'B' coi lati EB', EC, questo dovrebbe avere per diagonale un lato BC = DE. Ma la diagonale CB' è maggiore di CB, ossia di DE. Per lo che quelle tre potenze non possono essere in equilibrio. Per simile ragione non lo possono essere se fossero espresse dalle tre rette CE, ED, EB''.

18. Quindi nel triangolo rettangolo NCE i tre lati esprimeranno tre potenze in equilibrio; ossia nel paralellogrammo rettangolo NCKE sarà CE ⊐ NE, EK. Imperocchè supponendo le due potenze EC, ED agenti da E verso i punti C, D, sarà 2EN ⊐ CE, ED (n.° 17), come pure supponendo le due potenze EC, EL agenti verso i punti C, L, sarà 2EK ⊐ EC, EL (n.° 6); onde si ha 2EN, 2EK ⊐ EC, ED, EC, EL. Ma ED, EL, essendo eguali ed opposte, sono come nulle: dunque sarà 2EN, 2EK ⊐ 2EC, ossia EC ⊐ EN, EK ⊐ EN, NC (n.° 3).

19. Poichè nel rettangolo NCEK la potenza espressa da CE è equivalente alle due CN, CK, ossia CN, NE, perciò le tre potenze espresse dai lati del triangolo rettangolo NCE si potranno dire in equilibrio nel senso esposto al n.° 14. E poichè nel triangolo rettangolo i lati sono gli stessi seni degli angoli opposti, perciò ognuna delle tre potenze sarà espressa dal seno dell'angolo formato dalle altre due, cioè a dire CE

sarà espressa dal seno dell'angolo CNE; EN da sen. NCE; NC da sen. NEC. Ma il seno dell'angolo NCE è lo stesso che il coseno dell'angolo NEC, che è il suo complemento, come pure sen. NEC è lo stesso che cos. NCE, epperò sarà EN : NC = cos. NEC : cos. NCE.

20. Come nel rombo originario la diagonale BC esprima (Fig. 1) una potenza equivalente alle due espresse dai lati contigui CE, ED si può più positivamente dimostrare nel seguente modo. È chiaro, che la risultante delle due CE, ED deve passare pel mezzo dell'angolo DEC, epperò deve essere nella direzione della diagonale EB, ed essere perpendicolare all'altra DC. È parimenti manifesto, che la risultante di due potenze non può essere diversa dalla risultante di due altre se non per ragione o della diversità di grandezza delle potenze, o della diversità delle loro direzioni, ossia degli angoli che formano, o per ambedue le ragioni insieme. Quindi, allorchè due potenze BC, CE eguali tra loro formano un angolo eguale a quello formato da altre due C*a*, C*d* eguali tra loro, ma diverse dalle prime, le loro risultanti devono essere in ragione delle componenti rispettive: il che primamente è chiaro, allorchè l'angolo BCE è di 120°, mentre la risultante allora è eguale a ciascuna delle componenti (n.° 6). Ma quando due potenze BC, CE sono eguali tra loro, ed a queste sono eguali due altre CE, ED, le quali formino un angolo CED diverso dall'angolo BCE formato dalle prime due, le risultanti non possono essere diverse tra loro, se non per ragione della diversità degli angoli, la quale diversità è da estimarsi dai seni degli angoli medesimi; e ciò è manifesto nell'equilibrio originario, in cui la risultante DC è espressa dal seno dell'angolo ottuso BCE, nè può essere espressa dall'angolo medesimo. In fatti il rapporto delle tre potenze nell'equilibrio originario è di eguaglianza, poichè la risultante è eguale a ciascuna delle componenti: ma gli angoli, che formano tra loro le potenze, non sono eguali, essendo di 120 gradi l'angolo formato tra loro dalle due componenti, e di 60 quello formato dalla risultante con ciascuna componente: onde il rapporto d'eguaglianza delle tre potenze equilibrate tra loro non può esser espresso dagli angoli, ma è da esprimersi dai seni o coseni degli angoli, che esse formano, giacchè il seno dell'angolo di 120° è lo stesso col seno dell'angolo di 60°.

Ora la risultante delle due BC, CE, che è CD, ossia 2CN, è il doppio seno dell'angolo CEN, ovvero il doppio coseno dell'angolo DCE, ossia NCE, che la risultante DC forma con ciascuna delle due componenti BC, CE. Per lo che, dovendo il rapporto delle due risultanti da componenti eguali, ma costituenti diverso angolo, essere espresso dai rispettivi seni, o coseni dei loro angoli, la risultante delle due CE, ED costituenti un angolo di 60° supplemento dell'angolo di 120° deve parimenti essere espressa da una retta, che sia il doppio coseno dell'angolo NEC, ossia NED, ch'essa forma colle rette CE, ED; il qual coseno è NE. E poichè le due diagonali DC, BE si tagliano vicendevolmente per mezzo, e ad angoli retti, ed inoltre BE taglia per mezzo l'angolo CED = NCE, come CD taglia per mezzo l'angolo BCE, perciò la retta, che deve essere il doppio coseno dell'angolo NEC, ossia NED, cioè che deve essere 2NE, non può essere, che la diagonale EB, siccome quella, che è = 2NE. Dunque nel rombo originario la diagonale BE, che passa per gli angoli acuti esprime una potenza equivalente alle due espresse dai lati ad essa contigui.

21. Questa verità è così dedotta per analogìa all'equilibrio originario derivante dall'equilibrio primo: la qual ánalogìa devesi ammettere, affinchè il rapporto tra le due risultanti sia costante, cioè conveniente col principio dell'equilibrio primo. E veramente intanto la risultante DC può essere espressa da 2NC, come doppio coseno dell'angolo NCE, in quanto che essa deve formare, come si è veduto, un angolo retto colla risultante delle due CE, ED; d'onde viene costituito il triangolo rettangolo CNE, in cui l'ipotenusa CE è una delle tre potenze eguali costituenti sì l'equilibrio primo, che l'originario. Ora in questo triangolo è $\frac{1}{2}$ DC : NE = sen. NEC : sen. NCE, ossia DC : 2NE = sen. NEC : sen. NCE = cos. NCE : cos. NEC. Ma nell'equilibrio originario (n.° 20) le risultanti sono espresse dal coseno degli angoli, che esse formano colle componenti eguali. Dunque come DC, che è espressa da cos. NCE, è la risultante delle due BC, CE, così 2NE, ossia EB come espressa da cos. NEC, sarà la risultante delle due CE, ED, che sono eguali tra loro.

22. Quindi si può dedurre quello, che già fu dimostrato (n.° 18), cioè che nel triangolo rettangolo NCE i tre lati

esprimono tre potenze in equilibrio, ossia che nel rettangolo NCEK è CE⌐NE, EK.

23. Avendo riguardo all'analogìa si può asserire, che tre potenze espresse o esprimibili dai lati di un triangolo qualunque sono in equilibrio, in quanto che compiendo su di essi un paralellogrammo, ogni diagonale di esso esprimerà una potenza equivalente alle due espresse dai lati a ciascuna contigui. Come ciò si verifichi nelle potenze espresse dai lati dei triangoli originarj DEC, CNE fu già da noi dimostrato. Ora affinchè tre altre potenze sieno tra loro in equilibrio, devono avere un'espressione analoga alle espressioni sì dell'equilibrio primo, che dell'originario, cioè devono essere riducibili alla condizione di tale equilibrio: perciocchè altrimenti sarebbero tre potenze, che si direbbero in equilibrio senza aver il senso di questo nome, ossia senza avere primamente formata un' idea vera dell'equilibrio, la quale richiede, che si determini la condizione prima, o la costituzione, che devono avere tre potenze per essere in equilibrio; condizione, che non dipende dall'arbitrio nostro, essendo costituita da Natura, cioè da quella Potenza, da cui sono le potenze, o forze meccaniche. Ma affinchè tre potenze si possano ridurre all'equilibrio primo ed originario, esse devono essere espresse, o esprimibili dai lati di un triangolo: perciocchè, essendo in ogni triangolo i lati come i seni degli angoli opposti, le potenze espresse dai lati saranno espresse col rapporto alle loro direzioni; epperò ognuna sarà espressa dal seno dell'angolo, che formano le altre due; il che è la condizione dell'equilibrio primo ed originario (n.° 11, 19). Certamente non si può trattar dell'equilibrio di tre potenze, senon supponendo tacitamente, che esse sieno esprimibili pei lati di un triangolo. Tre potenze pertanto, se sono espresse dai lati di un triangolo, sono in equilibrio; e vicendevolmente se sono in equilibrio sono esprimibili pei lati di un triangolo.

24. L'antecedente teorema comprende tutti i varj casi dell'equilibrio di tre potenze. Ma perciocchè la dimostrazione di esso derivata dall'analogìa potrebbe ad altri sembrare non abbastanza convincente, io progredirò a dimostrare indipendentemente da essa, l'equilibrio di tre potenze espresse dai lati di qualunque triangolo rettangolo. A tal fine sulla diagonale CD (Fig. 3) del rombo originario BCED si formi un

un rombo FCGD ad esso simile, ma in modo, che l'angolo acuto sia al punto C. Sarà CD⊐FC, CG (17, 20). Dippiù il triangolo rettangolo NCG, essendo simile all'altro NCE, esprimerà nei suoi lati tre potenze in equilibrio (n.° 3, 23), così che, compiendo su di esso un rettangolo, la potenza espressa dalla diagonale CG sarà equivalente alle due espresse dai lati NG, GX, ovvero CN, NG.

Sarà parimenti FG⊐CG, GD (n.° 3, 6): e poichè per essere DCE un triangolo equilatero le tre rette CG, GE, GD esprimono tre potenze costituenti l'equilibrio primo, perciò sarà EG⊐CG, GD: onde si avrà FG=GE=BF.

25. Descrivendo col raggio CN un cerchio TNY, le due ipotenuse CE, CG dei due triangoli rettangoli NCE, NCG sono secanti, ed i lati NE, NG sono le loro corrispondenti tangenti, ed il lato NC è ad essi comune: onde le potenze espresse dai tre lati di ciascuno di questi due triangoli, le quali abbiamo veduto essere in equilibrio, sono espresse dal raggio, dalla secante, e dalla corrispondente tangente. Ora conducendo qualunque altra secante, come CA, la potenza espressa dalla corrispondente tangente NA, sarà in equilibrio colle due espresse dal raggio CN, e dalla secante CA. Ciò devesi ammettere, affinchè l'equilibrio abbia una legge costante, quale è quella indicata dalle potenze espresse dai due triangoli NCE, NCG. Ma per una più precisa dimostrazione supponiamo, che la cosa sia altrimenti. In tale supposizione, o si vuole, che la potenza, la quale deve esser in equilibrio colle due NC, CA sia nella direzione della tangente, o no. Se supponesi in una direzione diversa da quella della tangente, essa non avrebbe comunicazione colla secante, epperò non potrebbe costituire equilibrio colle due NC, CA. Che se supponesi essere nella direzione della tangente, ma espressa da una retta minore della tangente NA, essa parimenti non comunicherebbe colla secante, onde non potrebbe essere in equilibrio colle due proposte potenze NC, CA. Resta pertanto, che si supponga maggiore. Per mostrare, che ciò non possa essere, intendasi la tangente divisa in piccolissime, ed innumerevoli parti tra loro eguali, ed una di queste si chiami *dx*. Intendansi parimenti condotte a ciascun punto di divisione le corrispondenti secanti, e sia C*r* la prima secante, o la più vicina a CE: nella quale ipotesi la porzione E*r* della tangente intercetta tra le due secanti

CE, C*r* sarà = *dx*. Ciò posto è chiaro, che se la potenza equilibrata colle due espresse dal raggio C*r*, e da una secante qualunque fosse espressa da una tangente maggiore di quella, che corrisponde alla sua secante, la potenza equilibrata con CN, e C*r* potrebbe essere N*r* + *dx*, ossia N*r* + E*r*, cioè NE. Ma questo non può essere, perciocchè è dimostrato (n.° 23), che NE esprime la potenza, che è in equilibrio con CN, e CE. E veramente essendo la secante C*r* minore di CE, e formando un angolo C*r*N acuto, e maggiore dell'angolo CEN, non può la potenza equivalente alle due NC, C*r* essere eguale, o maggiore di quella, che equivale alle due CN, CE; epperò non può essere espressa da una tangente eguale a NE, o maggiore di questa. Dee pertanto essere N*r* la tangente richiesta.

Essendo dimostrato, che alla potenza espressa dalla prima secante C*r* corrisponde una potenza espressa dalla tangente N*r*, si dimostrerà nello stesso modo, che alle due potenze espresse dal raggio CN, e dalla seconda secante C*t* non può equivalere una potenza espressa da una tangente eguale, o maggiore di quella che equivale alle due CN, C*r*; e che perciò la potenza equivalente alle due CN, C*t* deve essere espressa dalla tangente N*t*. Una simile dimostrazione vale per la terza e per le altre successive secanti. Onde è da conchiudere, che le tre potenze espresse dal raggio CN, da una secante qualunque CA, e dalla corrispondente tangente NA sono tra loro in equilibrio: il che vale dentro i limiti del raggio NC, e della secante CE. Ma poichè l'angolo NCE è di 60 gradi, cioè maggiore di un semiretto, perciò i triangoli rettangoli formati dentro quei limiti conterranno tutte le possibili diversità di triangoli rettangoli per rapporto ai loro angoli, e conseguentemente ai loro lati. Per lo che le tre potenze espresse dai lati di qualunque triangolo rettangolo sono in equilibrio, cioè una qualunque di esse equivale alle altre due.

26. Che alle potenze espresse dal raggio CN, e da una tangente qualunque N*r* sia equivalente la potenza espressa dalla corrispondente secante C*r* si può dimostrare dal principio esposto al n.° 13 ed applicato al caso dimostrato nel n.° 17. Quindi in un rettangolo la diagonale, ed i due lati contigui esprimono tre potenze, ognuna delle quali equivale all'altre due.

27. In un paralellogrammo qualunque ciascuna delle due diagonali esprime una potenza equivalente alle due espresse

dai lati ad essa contigui (Fig. 4). Per provare primamente la proposizione per rapporto alla diagonale AC, che passa per gli angoli acuti del paralellogrammo FAHC, si costruisca su di essa come diagonale il rettangolo ADCB, e sul lato AF come diagonale il rettangolo ADFG. Sarà primamente AC⊣AD, AB (n.° 26), ossia AC⊣AD, AH, HB; ed essendo HB, AG eguali, ed agenti nello stesso senso, cioè verso B, sarà AC⊣AD, AH, AG. Ma è AF⊣AD, AG. Dunque, sostituendo, si avrà AC⊣AF, AH.

28. Per la diagonale AC, che passa per gli angoli ottusi del paralellogrammo FAHC (Fig. 5), si costruisca su di essa il rettangolo ADCB, e sul lato AF come diagonale il rettangolo GADF. Supponendo, che AC agisca da C verso A, le due AH, AF agiranno da A verso i punti F, H; ed allora le due GA, AD, che sono equivalenti ad AF, agiranno dai punti G, D verso A. Ora essendo DABC un rettangolo, sarà AC⊣AB, AD; ed essendo le tre potenze GA, AD, AF in equilibrio, sarà AD⊣FA, AG, (n.° 26), ovvero conducendo DG' paralella ad AF sarà AD⊣FA, AG'. Onde si avrà AC⊣AB, G'A, AF. Ma le due G'A, BH sono eguali ed agenti nella stessa direzione: onde sarà AC⊣AB, BH, AF, ossia AC⊣AH, AF.

Così dunque dalla prima forma d'equilibrio è dimostrato l'equilibrio di tre potenze nei varj casi, che occorrono nella Meccanica. Rimane ora, che io soggiunga alcune riflessioni su di alcuni principj, che da' Meccanici si sogliono assumere: il che richiede, che primamente io dichiari, come il principio da me assunto abbia una vera ragione di principio.

29. L'equilibrio costituito da tre potenze eguali, ed agenti con direzioni equidistanti tra loro è la prima forma d'equilibrio, e vuolsi chiamare equilibrio primo; e ciò per più motivi: primamente perchè presenta una verità per sè manifesta alla ragione, poichè per essere assunta come certa, non ha bisogno di essere riconosciuta per mezzo dei sensi, siccome quella, che è derivante immediatamente dalla ragione prima d'eguaglianza: dippoi perchè da quel principio deriva l'idea, e la dimostrazione dell'equilibrio nelle potenze meccaniche, come appare dalle cose esposte.

30. Nell'equilibrio primo essendo le tre potenze R, S, T tra loro eguali, ciascuna può essere espressa per uno, cioè per l'unità aritmetica, ossia per 1, e poichè una qualunque di esse, come R equivale alle altre due S, T, ciascuna delle quali è

parimenti uno nello stesso senso, perciò R equivalerà ad S con T; ma non si potrà dire, che equivalga alla loro somma, poichè allora 1 equivalerebbe ad 1 + 1, cioè a 2. Solo potrà dirsi, che 1 equivale ad 1 in 1, poichè 1 in 1 anche dai Matematici si riguarda come la potenza di 1, il cui valore è 1. Nè solo si può, ma deesi necessariamente ciascuna potenza nell'equilibrio primo nominare *uno*, affinchè si possa con verità esprimere qual è nel suo complemento. A dichiarazione della qual cosa vuolsi distinguere l'equilibrio come da compiersi, e come compiuto. L'equilibrio come da compiersi è la disposizione di tre potenze supposte, le quali noi rendiamo sensibili, esprimendole per tre rette dirette ad uno stesso punto; e questa disposizione come supposta è dalla potenza nostra d'intendere, e di sentire; onde presenta l'equilibrio soltanto come possibile, poichè le rette assunte non sono potenze. Quindi, affinchè l'equilibrio sia reale, conviene alle tre rette supporre applicate potenze reali, le quali abbiano la condizione richiesta per essere in equilibrio; ed allorchè hanno tal condizione, si ha il complemento dell'equilibrio. Questo però non è da potenza nostra, ma dalla costituzione naturale delle potenze meccaniche; e nel complemento, che interviene in quel punto, in cui concorrono le direzioni delle potenze, queste convengono in una, e svanisce ogni direzione lineare, e tutto ciò, che nell'equilibrio come da compiersi era sensibile. Da che intendesi, come nell'equilibrio primo il valore di ciascuna delle tre potenze eguali debba essere espresso per 1, affinchè si possa con verità esprimere qual è nel suo complemento. E veramente, se il valore di ciascuna si esprimesse con un altro nome numerico, per esempio per 2, ovvero per una quantità indeterminata, come n, il complemento dell'equilibrio primo in vece di presentare nella sua espressione una verità per sè manifesta, presenterebbe una manifesta contraddizione. In fatti, se ciascuna di esse si chiamasse 2, non potrebbe una riguardarsi come equivalente nè alla somma delle altre, la quale sarebbe 4, nè al loro prodotto, che sarebbe parimenti 4, nè al loro quoziente, che sarebbe 1, nè alla differenza loro, che sarebbe zero. Lo stesso sarebbe, se ognuna delle potenze si esprimesse per una frazione, o per qualunque funzione di una quantità. Per lo che l'equilibrio primo come compiuto, ossia il suo complemento non può esprimersi con

verità, se non dicendo, ch'esso è uno costituito da tre potenze, ciascuna delle quali è uno per nominazione propria di uno; onde in esso ognuna delle tre potenze è *uno*, due sono *uno*, e tre insieme sono *uno*. Ed è da osservare, che quando si dice che nell'equilibrio primo ciascuna potenza è uno equivalente ad uno in uno, ovvero che uno è uno in uno, per la particella *in* non può intendersi nè moltiplicazione, nè divisione: perciocchè la moltiplicazione, e la divisione sono operazioni della potenza nostra d'intendere relative a quantità, che per sè non hanno funzione veruna; ma nell'equilibrio primo interviene al suo complemento una funzione delle potenze, che non è da potenza nostra, e che è superiore all'intelligenza umana: la qual funzione noi non possiamo esprimere se non dicendo, che ognuna delle tre potenze dà alle altre due quello, che da esse riceve. Quindi è, che la legge dell'equilibrio, quantunque sia dimostrata, pure è riguardata anche dai Matematici come un paradosso, o anzi come un mistero, poichè nel suo complemento presenta una verità, che sembra contraria alla ragione.

31. Per intendere come da tre potenze possa risultare l'equilibrio alcuni suppongono, che v'intervenga una opposizione o distruzione di forze. Ma nell'equilibrio primo questa supposizione non può certamente aver luogo. Il sospetto di tale distruzione ha origine da alcune meno che esatte espressioni usate dai Meccanici. Essi nell'equilibrio costituito da tre forze o potenze chiamano *Risultante* quella, che è espressa dalla diagonale di un paralellogrammo, e *Componenti* le due espresse dai lati contigui alla medesima, e quindi asseriscono, che nell'equilibrio interviene *Composizione e Risoluzione* di forze, riguardando la risoluzione come opposta alla composizione, e la risultante come opposta alle componenti. Ma non può con verità dirsi che la risoluzione sia contraria alla composizione delle forze. Imperocchè la risoluzione della forza riguardata come *risultante* è la simultanea posizione delle forze componenti *con* la forza stessa risultante, affine di costituire l'equilibrio: onde la risoluzione è nella composizione sì dalle forze componenti, come dalla risultante stessa. E veramente la risultante, sebbene non sia una delle forze chiamate arbitrariamente *componenti*, è però una delle componenti, o anzi *costituenti* l'equilibrio, in quanto che essa pure interviene nella

composizione, o anzi *costituzione* o *condizione* dell'equilibrio: e quelle due, che sono riguardate come componenti, non sono componenti della potenza risultante: perciocchè essa, come è manifesto nell'equilibrio primo, non è da quelle composta, non risultando essa dalla loro addizione, o somma.

32. Che la denominazione di potenze componenti, e di risultante sia arbitraria, cioè non abbia un senso determinato, appare massimamente nell'equilibrio primo. Imperocchè essendo questo costituito simultaneamente da tre potenze eguali agenti tra loro in direzioni equidistanti, non avvi ragione, per cui una si abbia a chiamare risultante, o componente; onde tutte e tre devonsi chiamare costituenti l'equilibrio primo. Allora solo interviene, che si possa introdurre il nome di una risultante, e di due componenti, quando una di esse si suppone la diagonale di un Rombo equilatero, ed agente in senso diverso da quello, che richiedesi per la prima forma d'equilibrio. Ma siccome una qualunque delle tre potenze che sono in equilibrio, può essere espressa dalla diagonale di un parallellogrammo (n.° 14), i cui due lati ad essa contigui esprimano le altre due, perciò quei nomi non hanno un senso preciso o esclusivo, e solo valgono per facilità di espressione.

33. Una sola funzione pertanto è quella, che si ha nell'equilibrio sì dalla composizione, che dalla risoluzione delle forze; epperò nell'equilibrio primo non può supporsi opposizione di potenze, o delle loro direzioni. Quindi è, che nell'equilibrio primo, allorchè si riduce al meccanico col supporre una delle tre potenze per diagonale di un rombo, si può bensì in qualche senso supporre una composizione di forze, ma non forza composta (n.° 31); interviene pure numero di potenze, senza che però veruna di esse, quando si enuncia qual è nel complemento, possa essere espressa per un numero (n.° 30).

Per un solo riguardo l'equilibrio primo si può dire un composto, cioè in quanto che ogni potenza da noi al principio si riguarda come una quantità, e come tale ognuna non è uno, che sia semplice per ragion prima. Svanisce però l'idea di quantità, e di qualunque oggetto esteso, e sensibile nel complemento dell'equilibrio, poichè per esprimerlo conviene supporre *uno* ciascuna potenza, ed *uno* tutte e tre insieme: e nel complemento intendesi, che il denominare ciascuna delle tre potenze equivalente alle altre due presenta una verità mani-

festa, ed assoluta, ma non il dirla risultante: perciocchè una potenza come risultante, è conseguente alle due, da cui risulta, le quali sono ad essa antecedenti, e non può quell'una, che è conseguente, essere anche antecedente nello stesso complemento.

34. Che nell'equilibrio primo non intervenga opposizione, nè distruzione di forze si può confermare nel seguente modo. L'opposizione di due forze si ha, quando esse agiscono sulla stessa retta, o direzione, ma in senso contrario. Ora una qualunque delle tre potenze costituenti l'equilibrio primo non agisce sulla stessa direzione con un'altra. Per lo che non può esservi opposizione nè conseguentemente veruna diminuzione di forze.

Replicherà forse taluno concedendo bensì, che non avvi opposizione totale, ma pretendendo, che siavi opposizione parziale in proporzione dell'angolo, che le direzioni delle potenze formano tra loro. A che rispondo primamente, che tutti i Meccanici convengono non esservi opposizione veruna tra due forze, le cui direzioni sieno ad angolo retto: onde dall'angolo che formano le direzioni di due potenze non può dedursi, che tra esse sia opposizione. In secondo luogo se nelle tre potenze costituenti l'equilibrio primo fosse qualche opposizione, e conseguentemente qualche diminuzione di forza, tale diminuzione interverrebbe in ragione d'eguaglianza, giacchè le potenze e gli angoli formati dalle loro direzioni sono supposte eguali. Per lo che anche i residui delle potenze, o forze medesime sarebbero eguali tra loro; epperò sarebbero esprimibili ciascuno per l'unità, costituirebbero l'equilibrio come se nissuna opposizione, o diminuzione di forze fosse intervenuta.

35. Quello, che ho detto dell'equilibrio primo, era da dirsi per confermare l'esattezza delle dimostrazioni da me arrecate nelle varie forme d'equilibrio, e per potere con ragioni dimostrative rilevare l'inesattezza di alcuni principj, che da altri a tale oggetto si sogliono assumere. Tra quelli uno è, che *due forze eguali, ed opposte sono in equilibrio:* il che si assume come principio per sè evidente senza avere primamente dichiarato quello, che deve intendersi col nome d'equilibrio: onde quella asserzione non può riguardarsi come per sè evidente. Che se intendesi, che l'equilibrio sia per l'appunto costituito dall'opposizione e distruzione di due forze eguali,

ciò è manifestamente falso per più ragioni. E primamente supponesi, che nell'opposizione di due forze non intervenga una terza, quando che questa vi si deve necessariamente supporre. Imperocchè due forze affinchè sieno opposte, e si distruggano, devono essere applicate a due linee supposte inflessibili, che sono le loro direzioni, ovvero agenti in due punti materiali, ed inflessibili, che si urtino in senso opposto. Ora l'inflessibilità richiede una forza resistente distinta da quelle, che si suppongono opporsi tra loro. Non può dunque derivarsi l'idea d'equilibrio da due sole forze in opposizione; e tanto più, in quanto che nell'equilibrio primo nissuna opposizione interviene. Oltre di che l'equilibrio, che dai Meccanici si suole estimare, è costituito da tre forze applicate a tre diverse direzioni, e questo è ben diverso dall'opposizione di due forze eguali, nè quello da queste si può derivare.

36. Due forze pertanto eguali ed opposte non sono da dirsi in equilibrio. E veramente se per l'opposizione si distruggono, come possono supporsi sussistenti in equilibrio? Che se pure per brevità così si vogliono chiamare, dovrassi in esse intendere un equilibrio diverso dal primo, e dal meccanico; cioè un equilibrio negativo, in quanto che da tali forze non segue moto nel punto, su cui agiscono, ovvero in quanto che non turbano l'equilibrio di tre altre potenze, che realmente lo costituiscono: ed intanto non segue moto dalle due eguali ed opposte, in quanto che per tal opposizione una vicendevolmente toglie all'altra quello, che questa tende a dare, o a fare. Ma la quiete, che risulta in un corpo soggetto a due forze eguali ed opposte non basta per dare l'idea di vero equilibrio. Perciocchè anche un corpo sottoposto a nissuna forza motrice non si move; nissuno però lo dirà in equilibrio, se non chi confonda questo colla quiete.

37. A sostenere la denominazione di equilibrio in due forze eguali, ed opposte dirà forse taluno, che allora si sogliono riguardare come in equilibrio tre forze, quando si possono ridurre a due eguali ed opposte. A che rispondo, che questa riduzione può bensì farsi, ma dappoichè sia dimostrato, che le tre sono in equilibrio. Altronde la dimostrazione prima dell'equilibrio di tre non dipende da equilibrio di due; poichè l'equilibrio primo costituito da tre potenze è manifesto per sè indipendentemente dall'opposizione di due. La riduzione dell'

equilibrio

equilibrio primo a due forze eguali, ed opposte si fa, conducendo la diagonale del rombo equilatero, e riguardandola come rappresentante una potenza equivalente alle due espresse dai lati contigui. Ma in tal modo mutasi la forma prima d'equilibrio: perciocchè in questa le direzioni delle tre potenze sono egualmente distanti tra loro; laddove esprimendo una direzione colla diagonale, le tre potenze non hanno le direzioni egualmente distanti tra loro. Nulladimeno si ha ancora l'equilibrio tra la potenza espressa dalla diagonale, e le due espresse dai lati contigui; ma in virtù della prima condizione dipendente dall'eguaglianza delle tre potenze, e delle distanze delle loro direzioni. In fatti se si assumesse per esempio, che in un rombo equilatero la potenza espressa dalla diagonale è in equilibrio colle due espresse dai lati contigui, ciò non sarebbe per sè manifesto; ma converrebbe dimostrarlo, e la dimostrazione dipenderebbe dalla prima forma d'equilibrio. La riduzione pertanto dell'equilibrio primo a due forze eguali ed opposte non può farsi se non introducendo arbitrariamente una quarta forza, qual è l'espressa dalla diagonale del rombo, dalla quale però non dipende in verun modo l'equilibrio delle tre.

38. Qui potrebbe altri oppormi, che anche nell'equilibrio da me chiamato primo conviene supporre le tre potenze applicate a tre direzioni espresse per rette inflessibili, le quali, se sono, come io ho superiormente detto, altrettante forze resistenti, presenteranno l'equilibrio costituito da sei forze, tre delle quali sono agenti, e tre resistenti; onde l'equilibrio chiamato primo non sarà veramente tale, come quello che non sarebbe costituito dal minimo numero di forze o potenze. Per mostrare l'insussistenza di tale opposizione conviene osservare primamente, che una potenza non può intendersi se non con una certa direzione, così che una potenza è uno, in cui la direzione è bensì distinguibile, ma non separabile da essa; e la direzione di ciascuna delle potenze, che sono in equilibrio, è quello spazio rettilineo, ch'essa descriverebbe se fosse solitaria, cioè se non fosse in equilibrio con altre: onde la direzione di ciascuna potenza equilibrata è potenziale, cioè è una retta, che noi possiamo intendere come descrivibile, ma non come realmente descritta dalla potenza, poichè, supponendola descritta, si supporrebbe moto nell'equilibrio, ossia nella quiete. Quindi nell'equilibrio primo non è necessario sup-

porre le direzioni espresse da rette inflessibili, nè le potenze applicate a tali rette. Perciocchè tale supposizione allora soltanto deve farsi, quando si suppone, che le potenze agiscano tra loro in senso diverso, ovvero opposto, e che sieno espresse dalle loro direzioni. Ma nell'equilibrio primo non si può supporre azione delle potenze in senso diverso, od opposto (n.° 31), nè è necessario intender le potenze medesime come espresse da linee rette, poichè in quello l'azione delle potenze è indipendente dalla descrizione di spazio; ed esse stesse in vece di dirle agenti in un punto, in cui concorrono le direzioni lineari, si possono dire agenti tra loro con direzione loro propria. Per lo che nell'equilibrio primo le direzioni lineari delle potenze non devono riguardarsi, se non come un mezzo di trasmissione mutua della loro azione, il quale noi introduciamo per rendere a noi sensibile la costituzione di tre potenze in equilibrio. Così dunque l'equilibrio primo riconoscesi come costituito dal minimo numero di potenze, da cui possa formarsi l'idea di vero equilibrio.

39. Mi rimangono ora a fare alcune osservazioni sulle dimostrazioni dell'equilibrio proposte dal *Bernoullio*. Egli oltre ad altri assiomi comuni, assume primamente come certo, che due potenze eguali ed opposte sono in equilibrio: la qual asserzione a quali eccezioni sia soggetta già fu da me indicato.

40. Dippoi assume, che a tutte le potenze si possono sostituire le loro equivalenti; e per definizione egli chiama *equivalenti* le potenze, che colla stessa forza e colla stessa direzione tirano un punto. Questa definizione però non dà l'idea dell'equivalenza, che si considera in Meccanica. E veramente tal definizione si può applicare anche a due forze, e quando queste sieno eguali, e tirino un punto colla stessa direzione non presentano all'intelligenza se non l'eguaglianza supposta. Che se le due forze eguali suppongonsi opposte, una non può riguardarsi come equivalente all'altra, poichè per l'opposizione distruggendosi, non più sussistono. Per avere nelle potenze l'idea di equivalenza come distinta dall'eguaglianza, conviene necessariamente supporre almeno tre potenze, e queste per rapporto alla loro grandezza, e direzione talmente costituite tra loro, che una qualunque di esse realmente equivalga alle altre due: il che richiede che sieno già in equilibrio; e questo non può esser manifesto per ragion prima se non nelle tre potenze costituenti l'equilibrio primo.

41. In terzo luogo premette alle sue dimostrazioni questo Lemma: se tre potenze (Fig. 5) espresse per DA, DB, DC sono in equilibrio, saranno in equilibrio anche le loro duple, o in qualunque modo multiple Dm, Dn, Dp: e ciò egli dimostra così: se alle potenze Dm, Dn, Dp si sostituiscono queste altre DA + DA, DB + DB, DC + DC, nelle quali è manifesto l'equilibrio, tosto si manifesta la verità della proposizione.

Ma non vedesi, come nelle potenze sostituite sia manifesto l'equilibrio, poichè questo non fu da lui antecedentemente dimostrato, nè proposto come manifesto in verun caso; ma solamente fu supposto nelle tre potenze DA, DB, DC: onde al più dalla sostituzione si può conchiudere, che le tre sostituite saranno evidentemente in equilibrio condizionatamente, cioè quando sia o evidente per sè, o dimostrato, che nelle potenze, le quali sieno per sè evidentemente in equilibrio, ed alle quali si possa far la sostituzione delle loro multiple senza turbar l'equilibrio, conviene assumerle tali, quali sono richieste per l'equilibrio primo; e posto questo, è pure evidente, che sono in equilibrio le loro multiple, e submultiple, come accennai al n.° 3.

42. È inoltre da osservare, che il nome di multipli, e submultipli nell'equilibrio primo può bensì darsi alle potenze, quando si considerano nell'equilibrio come da compiersi, ossia come noi lo concepiamo per potenza nostra, ma non nell'equilibrio come compiuto. Perciocchè il complemento non può esprimersi qual è (n.° 30), se non nominando *uno* ciascuna potenza: il che mostra, che il principio assunto delle potenze multiple, e submultiple non è una condizione dell'equilibrio per sè manifesta, nè assolutamente vera, siccome quella che tende ad escludere, o almeno ad occultare una verità evidente, cioè che ognuna delle tre potenze nel complemento dell'equilibrio primo deve necessariamente essere espressa per 1, nè può essere espressa per un multiplo, o submultiplo, come sarebbe $1 \times a$, ovvero $\frac{1}{a}$.

43. Della sostituzione di potenze ad altre, ch'egli suppone equivalenti, si serve quindi il Bernoullio per dimostrare l'equilibrio nei varj casi. Ma poichè l'equivalenza non può essere se non di potenze, che già sieno in equilibrio, epperò quella da questo dipende, perciò le sue dimostrazioni sono

derivate da un principio, che non ha vera ragione di principio: laddove la proposizione di tre potenze eguali agenti tra loro con direzioni tra loro equidistanti presenta un equilibrio evidente e reale; onde il far dipendere da esso, siccome io ho assunto di fare, la dimostrazione dell'equilibrio in tre altre potenze tra loro diverse, e diversamente stimate, è rimontare al vero principio dell'equilibrio, principio derivante dalla ragione prima d'eguaglianza.

44. Aggiugnerò inoltre, che tra le dimostrazioni usate da quell'insigne Matematico trovasene una, la quale è del tutto fallace. La proposizione, a cui ha rapporto tal dimostrazione, è la seguente: Se due potenze eguali BA, BC (Fig. 7) sono equivalenti alla potenza BF, la quale sia tagliata per metà nel punto L dalla retta AC; e se pel punto B si conduce alla retta BF la perpendicolare DE; conducendo dai punti C, A le rette CE, AD perpendicolari a DE, la potenza BA equivalerà alle due BL, BD, e la potenza BC alle due BL, BE. Tale proposizione egli prende a dimostrare nel seguente modo: se si nega, che la potenza BA equivalga alle due BL, BD, suppongasi, che equivalga a due altre Bl, Bd: allora per simile ragione la potenza BC equivalerebbe alle potenze Bl, Be = Bd. Dunque le potenze Bd, Bl, Be, Bl equivalerebbero alla potenza BF, ossia 2BL: il che è assurdo. Così il Bernoullio. L'assurdo deve consistere in questo, che 2BL equivalerebbero a 2Bl, in quanto che le due Bd, Be come eguali ed opposte si distruggono: onde rimarrebbe 2Bl equivalente a 2BL: il che non può essere, essendo Bl nella stessa direzione con BL. Ma tale dimostrazione potrebbe valere a provare, che conducendo due altre rette BP, BR equidistanti da BL, la potenza espressa da BP equivalerà alle due BL, BD; e la potenza BC alle due BL, BE. Imperocchè, essendo le due rette BP, BR equidistanti da BL, che per costruzione è perpendicolare ad AC, saranno eguali tra loro, e si potranno le potenze espresse dalle stesse rette BP, BR supporre equivalenti alla potenza espressa da 2BL: onde avranno le condizioni supposte dal Bernoullio nelle due potenze AB, BC; epperò si potrebbe asserire delle due BP, BR quello ch'egli asserisce delle due AB, BC: il che sarebbe falso: perciocchè (n.° 25) la potenza BR è equivalente alle due BL, LR; ed è BP $\dashv$ BL, LP.

45. Che l'equilibro meccanico non abbia dimostrazione se

non per analogìa all'equilibrio primo, fu già da me accennato: il che gioverà, che io qui alquanto più dichiari, onde veggasi come quello da questo derivi. L'equilibrio primo è costituito da tre potenze eguali agenti tra loro con direzioni equidistanti tra loro. Queste direzioni come espresse da linee rette formano tre angoli ottusi, ciascuno dei quali è di 120°, essendo un terzo di quattro retti, nei quali comprendonsi tutti gli angoli possibili. Ma l'angolo ottuso, cioè maggiore di un retto, non ha seno proprio, poichè il suo seno è quello di un altro angolo, cioè dell'acuto, che è supplemento a due retti: onde il seno dell'angolo ottuso può dirsi razionale, e *mutuato*, in quanto che non può essere espresso se non da una retta, la quale sia seno dell'angolo acuto. Ma per seno di un angolo acuto non può essere una determinata retta, se non quando abbia rapporto a due altre costituenti con essa un triangolo rettangolo, qual è NCE (Fig. 1): onde i seni degli angoli dipendono da un triangolo. Ora quando si assume l'equilibrio primo, in questo è manifesta l'equivalenza di una potenza all'altre due indipendentemente dai seni degli angoli, poichè l'equivalenza è manifesta dall'eguaglianza delle potenze, e delle loro direzioni. Ma quando si deduce l'equilibrio originario dal primo, costituendo una delle tre potenze come diagonale di un rombo, e supponendola agente in senso diverso dalle altre due, allora la direzione della potenza equivalente, che chiamasi risultante, è mutata; e le direzioni, così come il valore delle potenze non può estimarsi se non dai seni degli angoli, che esse formano fra loro (n.° 20). Per lo che la condizione dell'equilibrio originario non può essere espressa se non dipendentemente da un triangolo rettangolo; ed affinchè da questo possa essere espressa tal condizione conviene, che sia non un triangolo rettangolo qualunque, ma quello che abbia in sè manifestamente la condizione sì dell'equilibrio primo, come dell'originario: il che richiede, che sia un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa CE esprima una delle tre potenze equilibrate, ed essa formi con un'altra di queste, cioè con CD, un angolo NCE, che sia supplemento dell'angolo ACE, cioè che sia di 60°. Tale è il triangolo NCE; ed in questo è manifesta la condizione dell'equilibrio originario, cioè che la risultante DC delle due CB, CE sia il doppio coseno dell'angolo NCE. Perciocchè essendo l'angolo NCE di 60°,

l'ipotenusa CE, che è = CD, è eguale al doppio coseno dell'angolo NCE. Da che vedesi, che l'equivalenza di una potenza a due altre deriva primamente dall'eguaglianza, che il seno totale espresso dall'ipotenusa ha col doppio coseno dell'angolo di 60°, supplemento dell'angolo BCE primario di 120°.

46. Poichè nel triangolo rettangolo originario è manifesta la condizione dell'equilibrio originario, perciò conviene, che in quello, cioè nei suoi lati, che sono i seni stessi degli angoli opposti ai lati medesimi, sia primamente la condizione, che devono avere tre potenze per esser in equilibrio, la qual condizione è, che esse sieno espresse dai lati, ossia dai seni degli angoli di tale triangolo. Posta la quale verità, si dimostra quindi, che la stessa condizione d'equilibrio hanno anche le potenze espresse dai lati di qualunque triangolo rettangolo, e quindi i lati di un triangolo qualunque.

47. Così dunque la condizione generale dell'equilibrio di tre potenze è, che ognuna sia espressa dal seno dell'angolo, che formano tra loro le direzioni delle altre due: la quale condizione è analoga all'equilibrio originario; e questo intanto sussiste in quanto che è analogo all'equilibrio primo, la cui costituzione è per sè manifesta.

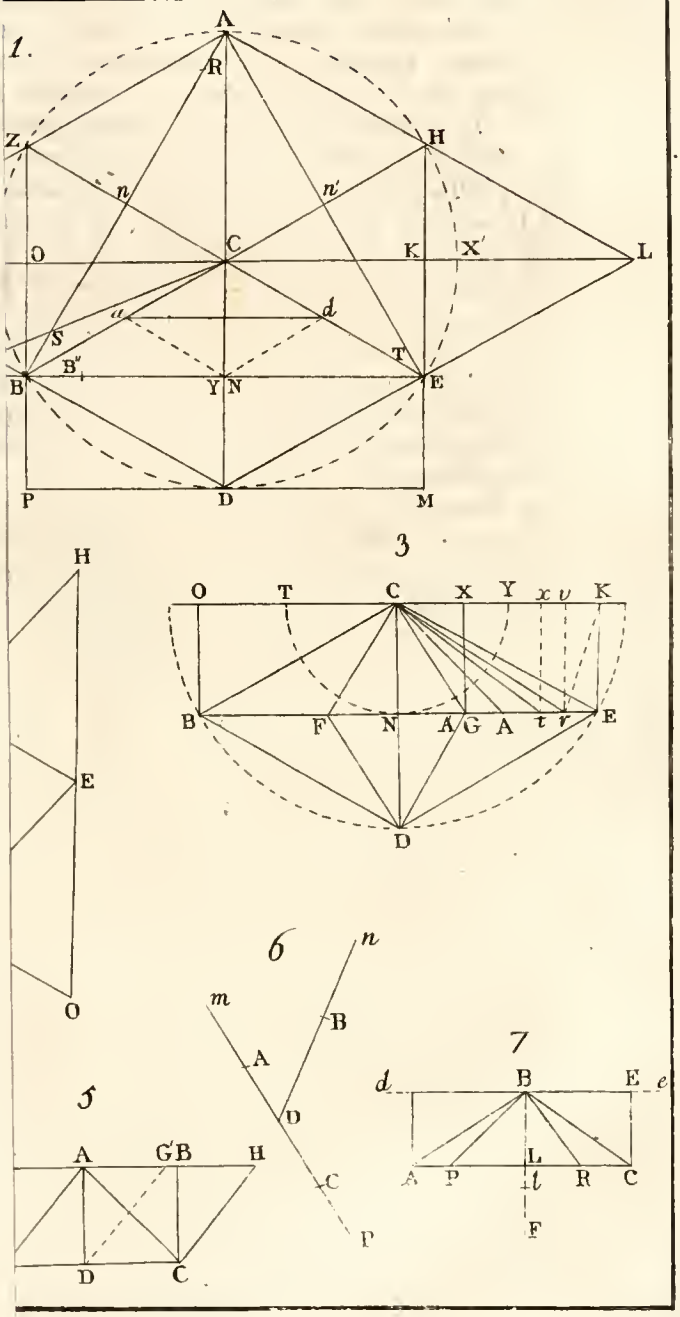
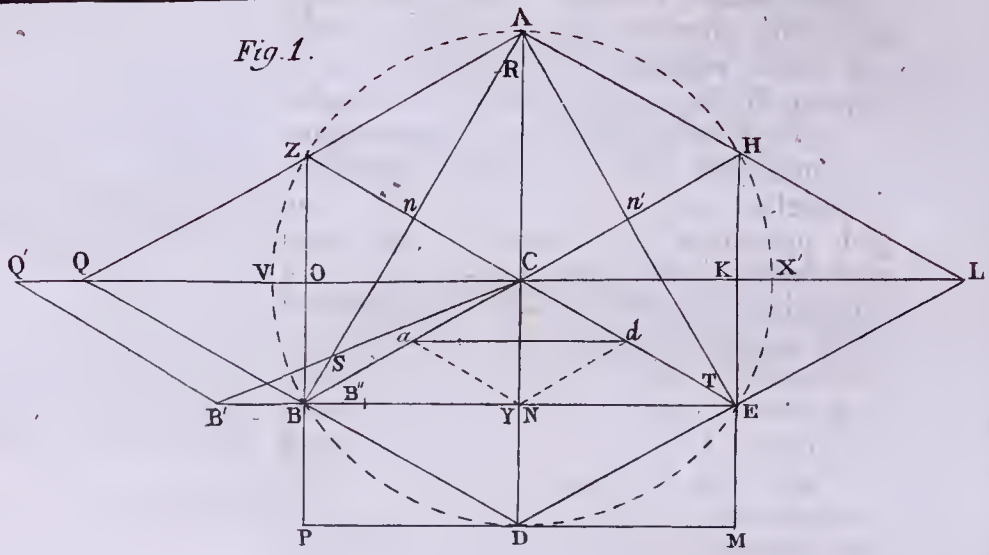
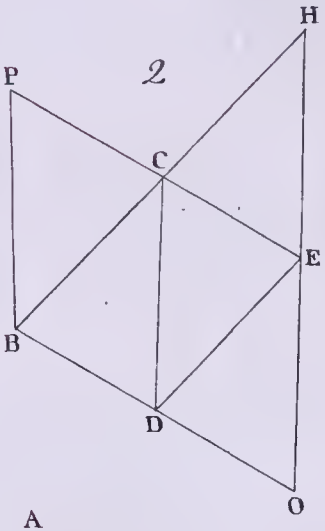

1.
A
R
Z
H
n
n'
O
C
K
X'
L
a
d
S
T
B
B''
Y
N
E
P
D
M
3
H
E
O
O
T
C
X
Y
x
v
K
B
F
N
A
G
A
t
r
E
D
6
n
m
B
A
D
C
P
5
A
G
B
H
D
C
7
d
B
E
e
A
P
L
t
R
C
F

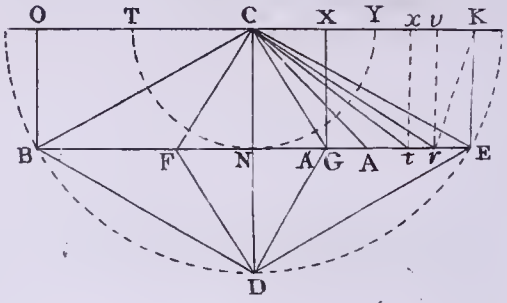
Fig. 1.


A
R
Z
H
n
n'
Q'
Q
V
O
C
K
X'
L
a
d
S
T
B''
B'
B
Y
N
E
P
D
M

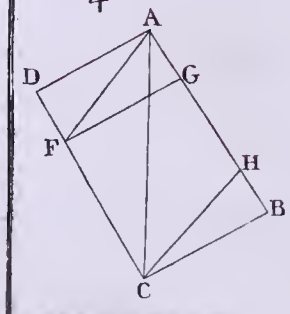
2


H
P
C
E
B
D
O

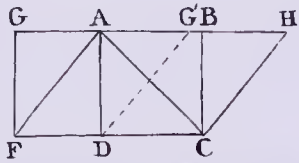
3


O
T
C
X
Y
x
v
K
B
F
N
A
G
A
t
r
E
D

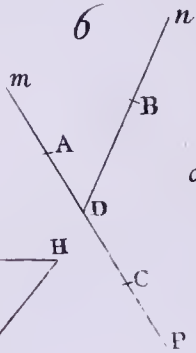
4


A
D
G
F
H
B
C

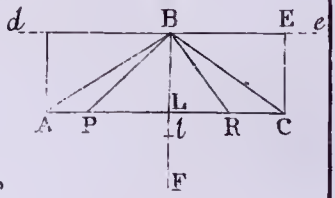
5


G
A
G'
B
H
F
D
C

6


n
m
B
A
D
C
P

7


d
B
E
e
L
A
P
t
R
C
F

DELL'ANOMALO FREDDO DELL'INVERNO PASSATO E DELLE SUE CAUSE

M E M O R I A

Del Sig. Ab. Vincenzo Chiminello.

Ricevuta li 16 *Maggio* 1808.

Lo scorso Inverno 1808 merita d'essere annoverato nella Storia Meteorologica tra Fenomeni non comuni. Non ebbe veramente un grado sommo di freddo in alcun giorno, il maggiore non essendo stato in Padova che appena 5 sotto il punto di congelazione del Termometro di Reaumur ai 26 Febbrajo, nè alcuna settimana ebbe crudissima come quelle di cert'Inverni insignemente freddi, eppure chi l'avrebbe creduto? la somma delle medie temperature dei tre primi mesi 1808 risulta minore della somma delle medie dei tre primi mesi 1789, di quell'Inverno terribile, che diede in Gennajo gradi 12 $\frac{1}{2}$ (1 del mese) sotto il punto di congelazione, più volte 10, 9, 7, *ec*, 12 $\frac{1}{2}$ prima (30 Dicembre), agghiacciò la Laguna sì fortemente, che sostenne il passaggio degli Uomini con pesi per 18 giorni, ed agghiacciò il vino puro nelle botti in cantine ben difese!

Fu la media temperatura di	Gennajo	1789	—1,02 = 1808	+1,80
	Febbrajo		+2,72	+1,04
	Marzo		+4,20	+2,05
		Somma	+5,90	+4,89

Tanto potè la continuazione del freddo, benchè minore, nei tre mesi primi 1808. Più: l'Inverno 1789 per il sommo freddo doveva aver lasciato un'impressione maggiore di quella lasciò questo 1808 nel vicino Aprile, e pure non è così; la temperatura media di Aprile in quell'anno fu gradi 10,24, e in questo anno solamente 8,19.

L'Inverno 1740 celebre per la durata, per le replicate nevi, per li ghiacci, per li frequenti geli, e disgeli nel rilas-

sarsi, e repentini rimessi geli nè pure fu sì freddo in totalità come questo, perchè tanto secondo le osservazioni del Poleni, quanto secondo quelle del Morgagni, che in quell'anno le cominciò, la somma delle temperature medie dei tre primi mesi sopra il gelo risulta gradi 9,2 che vuol dire superiore del doppio circa di 4,89, e però fu questo Inverno del doppio freddo di quello.

Notati sono nella Istoria nostra Meteorologica altri Inverni distintamente freddi, come il 1755, 1782, 1785, 1795, ma in totalità niuno pareggia questo: la somma delle medie temperature dei tre primi mesi del 1755, che agghiacciò la Laguna quasi come nel 1789 fu sopra il gelo 7,96, cioè poco meno che doppia di 4,89, quella del 1782 fu 5,44 mezzo grado più, quella del 1795 fu 7,76; solamente del 1785 fu la somma minore di tutte, cioè 3,88, e sembra quell'Inverno più freddo di questo. Ma l'acuto freddo in quell'Inverno 1785 cominciò alla metà di Marzo soltanto dopo una improvvisa procella orribile di neve con vento nordico turbinoso la notte dei 13-14, e per la caduta neve asciuttissima, e ghiaccj prodotti da un debole disgelo di giorno potè il freddo sostenersi tutto il resto del mese, e qualche poco in Aprile; all'opposto in questo Inverno 1808 cominciò il freddo a farsi ben sentire sino dai 20 Gennajo, prodotto, e sempre accompagnato da venti orientali pungentissimi, e molestissimi, ed in tutto Marzo, sebben la neve in pianura si fosse già squagliata sino dai 2, durò, e si propagò in Aprile sempre cogli stessi venti. Nei tre primi mesi del 1785 tali venti soffiarono sei volte meno, furono per lo più i Nordici, spesso gli Australi, ed Occidentali molto meno pungenti; sicchè dunque anche quell'Inverno quanto alla durata, e quanto al senso, in totalità fu meno freddo di questo (*).

Ma di questo fenomeno qual pertanto ne può essere stata la causa?

In Natura v'è una legge universale di compensazione che si

(*) Per confronto giusto con questo Anomalo Inverno 1808 ritardato presi anche degli altri anni Gennajo, Febbrajo, e Marzo, perchè in questi appunto, e non prima fu il più gran freddo ch'ebbimo, e Dicembre non suol essere molto acuto, se si eccettui in qualche anno la fine.

si scorge costante ed in piccolo, ed in grande; la stabilisce come principio fondamentale delle predizioni Meteorologiche il celebre Monsignor Giovene (Tomo X, P. I della Società Italiana delle Scienze.) Ad una elevazione e. gr. di Barometro sopra l'altezza media succede una pari discesa sotto, a' giorni caldi in estate succedono giorni freschi, a secco succede umido alternativamente, a stagioni, ed annate piovose stagioni, ed annate asciutte, ad Inverni freddi Estati calde, e viceversa, e per lo più in parità di durata, e d'intervallo di tempo. Ora passato il colmo dell'Estate 1807 dopo Luglio si provò un tal caldo estivo che quasi può dirsi fuor di stagione per aver durato tutto Agosto, e sino alla metà di Settembre; potevasi dunque aspettare un Inverno freddo ritardato, e prolungato, e questo in fatto appuntino si verificò sei mesi dopo. Ma veramente la legge di naturale compensazione è troppo generale, e può applicarsi a tutti gl'Inverni distintamente più freddi; vediamo, se altra causa essere vi potè meno generale, ma più immediata. Si ebbe una caligine densa, e quasi perpetua dai 14 Dicembre 1807 sino ai 3 Gennajo, la quale certo umettò sommamente la superficie della terra, e la bassa Atmosfera, e può essere stata questa forse causa del seguente freddo, se agisce la Natura in grande, come vedesi agire in piccolo. È nota la pratica dei Viaggiatori attraversando i deserti dell'Asia, e dell'Africa, e dei Naviganti nei Mari d'India, e della Zona Torrida: gli uni attaccano ai Cameli, e gli altri agli alberi dei bastimenti gli otri, i fiaschi, i barili circondati di canevacci ben bagnati, e questi così esposti ai venti, ed al Sole mentre si vanno asciugando si rinfrescano, e sempre più replicando la bagnatura. Tal rinfrescamento proviene dall'affinità già ormai conosciuta del fuoco coll'acqua specialmente sciolta in vapori; il fuoco interno e naturale, ed elettrico di un corpo umettato esce, e si unisce a quell'acqua, e vola via coi vapori ne' quali essa convertesi, e così quel corpo rimane freddo. Il medesimo effetto nasce bagnando la palla di un Termometro, ed è questa prova evidente; in mentre che la palla si asciuga il mercurio del Tubo, o altro che sia liquore, discende, e segna qualche parte distintamente visibile di un concepito freddo. Fu primo il Richman che osservò questo fenomeno del Termometro, e poscia il Cullen con esperienze diverse il non piccolo raffreddamento, che produce ne' corpi

l'evaporazione. Cessata dunque la detta caligine di venti giorni, e sopravvenuta una serie di dieci giorni sereni con sensibili venti, porzione del fuoco interno della crosta alla superficie terrestre, e della infima parte dell'Atmosfera dev'essersi elevata, e volata via coi vapori, e quindi potè cominciare a farsi freddo, e questo freddo potè poi crescere, e per altre, sebben più brevi caligini, o pioggie e nevi, e alternative serenità con forti venti sino alla metà di Febbrajo, e per il concorso degli elementi glaciali fatto più libero nell'abbandono del fuoco in stagione che la presenza del Sole non poteva sostituirne abbastanza di nuovo. In altri Inverni nella serie delle nostre osservazioni dopo caligini scorgo pure aumento di freddo. Ma per altro bisogna confessare, che sebbene la spiegazione abbia un fondamento di verità, non è soddisfacente per il freddo di questo anno, perchè la caligine non fu generale, e fu generale il freddo almeno ne' Paesi nostri d'Italia superiore; più forte dunque, e più estesa dev'esserne stata la causa, e la caligine non può essere che causa secondaria, ed aggiunta, ed al più causa principale del primo freddo.

Non è da stupire che in Gennajo, e Febbrajo sia stato un freddo continuato, ciò accade più volte; ma sorprende il freddo di Marzo propagato sino alla prima parte di Aprile, ed è fenomeno strano il soffio perpetuo dei venti per lo più orientali freddi e pungenti da Gennajo sino a tutto Aprile, li quali, benchè deposta l'asprezza, continuarono i primi giorni di Maggio. Non mi è noto, se in questo Inverno in Asia vi sia stato insigne freddo con nevi e ghiaccj, ma lo fa sospettare il soffio di tali venti; nota il Toaldo nel suo Saggio Meteorologico, che ciò succede quando in quella parte sono insolitamente freddi gli Inverni, e prima di esso il Musschenbroek notò parlando del Belgio, che *venti Orientales sunt frigidi et gelu advehunt, raro enim gelu incipit, nisi prius ventus orientalis efflaverit, solent esse sicci cum serena cœlo in primis si diutius spirent;* ma si ha notizia d'insolite nevi ne' Paesi Levantini meno lontani. Raccolse il celebre mio corrispondente Sig. Co. Filiasi, che nel mese di Marzo a Macasca, e in generale in tutta l'Albania, nella Dalmazia, nella Bosnia, nella Servia, in Bulgaria molto e molto nevicò, e in Dalmazia specialmente, ove le nevi furono così alte in monte, ed in piano che impedivano i viaggi, lo che accadde pure in Corfù, ove fu neces-

sario sgombrare le vie per poter camminare, fenomeno di cui simile fra quegli abitanti non c'è memoria. Ecco dunque la causa più efficace dell'insolito freddo in questa parte d'Italia per tutto il mese di Marzo e più, portatoci, e sostenuto dai venti Orientali divenuti assai più forti, ed acuti, che ne' due precedenti mesi. Dell'influenza di tali venti ne provò pure l'effetto con abbondanti nevi qualche parte del Napolitano, la Toscana, la catena degli Appennini. Per altro in questo modo si spiega un effetto simile, il freddo insolito dell'Italia per il freddo insolito del Levante. Qual mai dunque sarebbe stata la causa comune di quest'insoliti freddi in Italia, in Levante, e in altri Paesi?

Se ammettasi un elettricismo celeste o mondiale il quale agisca, cioè si ecciti, e si comunichi tra Globo e Globo, come qui tra corpo e corpo l'elettricismo terrestre, ed atmosferico, attribuirei al Cometa comparso alla fine di Settembre 1807 non solamente il caldo insolito di quel mese e gli ardori della seconda metà di Agosto precedente, ma (specie di paradosso) la stravaganza pure di questo Inverno. Sviluppò pertanto molto bene l'ipotesi dell'elettricismo universale il Toaldo nella seconda e terza edizione del suo Saggio Meteorologico partendo dal principio, che vi sia come pensava il Keplero una forza ed azione magnetica nel Sole, colla quale regge i corpi Planetarj, e che il magnetismo secondo il De Buffon altro non sia che un diverso impasto dell'elettricismo modificato, di che ne fa prova la grande affinità che si osserva tra questi due fluidi. Supposta dunque questa ipotesi, non dispregevole ed anzi analoga ai principj di Fisica generale, se il Cometa si consideri come un Globo estraneo venuto verso il Sole centro del sistema Planetario, e tale puossi considerarlo perchè venuto da gran distanza, di che prova ne fa il non trovarlo tra le comete osservate addietro sino dagli antichi tempi, esso maggiore assai della terra, come pareva per le osservazioni che se ne fecero, più che la terra agendo colla sua forza di gravità verso il Sole, e questo immenso Globo Solare reagendo reciprocamente, con tale soffregamento il Cometa fatto già vaporoso per la vicinanza del Sole, e sino allora destituto di elettricismo, potè esserne soprabbondantemente caricato, e così con reazione simile sovra la terra avernele comunicato più che ai due vicini Globi Mercurio, e Venere meno suscettibili per

esserne già sempre molto carichi, e quindi gli ardori che si eccitarono sulla terra, i quali appunto spiegaronsi nell'avvicinarsi il Cometa al Sole.

Ma all'opposto questo aumento di elettricismo di cui più l'eterogeneo corpo della terra ne avrà ricevuto che l'Atmosfera, sebben vaporosa ma per origine elettrica, rompendo l'elettrico equilibrio tra l'uno, e l'altra può aver prodotto anche il freddo, di cui si tratta. Imperciocchè per teoria suggerita da' fenomeni artificiali dell'esperienze simili ai naturali stabilita da sommi Fisici l'agente principale delle Meteore è il fuoco elettrico, il quale le produce, se dalla terra si apre un sentiero, e un conduttore si forma per mezzo dei vapori, e va a penetrare nell'aria, ove più che abbonda, più dà di nevi, o di grandini che di pioggie. È già osservazione in tempo di Estate, che cade più spesse volte grandine che pioggia, se le nubi sono assai ridondanti di fuoco elettrico. La terra dunque per opera del Cometa più che avanti abbondando di fuoco elettrico, questo coi provocati vapori qui più densi, e più copiosi fatti per la declinante stagione insorgendo di mano in mano per equilibrarsi avrà di sè, e dei vapori medesimi caricato in eccesso l'Atmosfera, e così può aver prodotto non solamente le copiose pioggie di Novembre, e le nebbie di Dicembre, ma poi le gran nevi in tante parti ne' tre mesi seguenti, per le quali n'è segnito quel freddo continuo, ed alternativamente rinforzato coi venti pungentissimi di Levante, alla qual parte furono più copiose le nevi. Anche secondo l'opinione del Newton, che le Comete in Perielio ricevano un massimo riscaldamento, potendo venire in terra dell' emanazioni, possono qui succedere fenomeni straordinarj.

Non mancano poi esempj di gran caldo, e di gran freddo dopo la comparsa di qualche Cometa insigne. Chiamo insigne un Cometa, il quale o per la sua vicinanza alla terra, o per la sua gran massa è visibile ad occhio nudo, quando è in perielio. Tali sono quelli osservati anticamente sino alla metà del secolo prossimo scorso circa; fu Messier il primo che si occupò di proposito in cercare le Comete Telescopiche. Un insigne Cometa pertanto comparve nell'anno 1503, e freddissimo fu l'Inverno, come nota il Toaldo nelle sue Cronache (Saggio Meteorologico Ediz. 2.ª, e 3.ª), e caldissima fu l'Estate non avendo piovuto per 4 mesi; uno ne comparve nel 1607,

e seguì estremo secco, e l'Estate molto caldo, e nevosissimo fu l'Inverno seguente 1608; questi due esempj sembrano dimostrativi. Ma in oltre Inverni molto freddi, o Estati molto calde furono in altri anni comparendo un Cometa. Cometa comparve nel 1400, e fu quell'Inverno freddissimo specialmente in Francia con siccità di fiumi; altro comparve nel 1556 (quello che poi si calcolò poter ritornare nel 1848), e furono in quell'Estate calori eccessivi; non si trova in vero notato, che di tal anno sia seguito un Inverno freddissimo, ma può essere stato quello un Inverno anomalo come questo 1808, ritardato durevole e prolungato senza sommo grado di freddo, e perciò trascurato, perchè allora solevansi notare solamente i freddi che gelavano i fiumi, e le immense nevi.

Non dissimulerò per altro, che degli anni 262, 876, 906, 1529 ne' quali comparvero Comete gl'Inverni non trovansi notati freddissimi, e l'Estati caldissime, ma si nota, che tali anni invece furono piovosissimi; nè tacerò che più d'un anno senza Cometa ebbe o Inverno molto freddo, o Estate caldissima, o l'uno e l'altra, nè tacerò che di questo stesso anno 1808 in Vienna d'Austria dolci furono Gennajo, e Febbrajo; ma si può dire conforme ad un'opinione del Wisthon (Cometa 1680) che l'azione Cometica sulla terra in quegli anni piovosissimi o per la vicinanza, o per la massa sia stata più di attrazione, che di elettricismo; si può dire, che gl'Inverni freddissimi, e l'Estati caldissime degli anni senza Cometa possono essere stati prodotti da cause insolite proprie della terra, come da' terremoti, da emanazioni di vulcani, o d'altro, il che può dirsi anche degli anni piovosissimi con Comete come i suaccennati, ne' quali l'azione Cometica per produr freddo, o caldo non prevalse; già non è raro, che s'incontrino terremoti, o Vulcani nelle Cronache degli anni piovosissimi, o d'Inverni singolarmente freddi, o di Estati caldissime. Finalmente quanto alla dolce temperatura di Gennajo, e Febbrajo in Vienna dirò, che il caso particolare poco diminuisce la grande estensione del fenomeno di questo Inverno, e che nè pur là fu dolce tutto il primo trimestre, perchè Marzo fu gelidissimo.

Sembra dunque che tali eccezioni non facciano obbietto esclusivo alla prodotta congettura, che l'azione Cometica sia stata cagione e del sommo caldo, e dell'anomalo freddo che abbiamo provato.

Quello però che all'occasione di questa piccola memoria confesso, e correggerò, benchè non tolga all'essenziale della congettura si è uno sbaglio corsomi nel cenno che diedi della Cometa in fine del Giornale Astro-Meteorologico di questo anno. Per fretta della stampa non badando alla posizione del Perielio del Cometa, ed al sito della terra, e considerando soltanto la distanza dell'arco perielio dal centro del Sole, scrissi che il Cometa intorno il Perielio distava da noi un terzo, circa, della distanza della Terra dal Sole, il che non era vero; secondo il calcolo, che poi feci, supponendosi essere stato il Cometa in Periclio ai 18 Settembre ad ore 17 59′ 48″, a segni 9 0° 49′ 2″ con distanza 6,478 in parti della distanza della Terra dal Sole allora 10,004, e con piccola latitudine, per l'angolo di commutazione 84° 29′ 0″, ed angolo di elongazione 34° 32′ 7″ risulta la distanza vera del Cometa dalla Terra 11,374, che vuol dire alquanto maggiore della distanza del Sole dalla Terra. Ma per questo non cessa, che secondo i supposti principj non abbia il Cometa potuto produrre sulla Terra un aumento di elettricismo, da cui sia provenuto e il sommo ritardato caldo di Estate, e il ritardato lungo freddo d'Inverno.

TEORIA

DELL' AZIONE CAPILLARE

Del Sig. De la Place

Ridotta alla piu' semplice ed elementare Geometria

Dal Sig. Giovacchino Pessuti.

Ricevuta li 22 *Maggio* 1808.

INTRODUZIONE.

1. Dopo che l'immortale Newton ebbe dimostrato coi più sottili e delicati esperimenti, che i raggi di luce, passando in grandissima vicinanza di certi corpi, sono da questi sensibilmente attratti o rispinti, dimostrò altresì irrefragabilmente che da queste forze attraenti o ripellenti nelle minime impercettibili distanze dipendevano unicamente i fenomeni e le leggi della riflessione e della rifrazione, fenomeni e leggi che sin allora non si appoggiavano che alla nuda osservazione, e la di cui spiegazione avea sin allora messo i Fisici a tortura inutilmente. Ciò che vi ha di più singolare in questa teoria della riflessione e della rifrazione si è, che in essa non vi è alcun bisogno di conoscere le leggi secondo cui agiscono quelle forze attraenti o ripellenti che adopera, e basta solo che si verifichi che quelle forze divengano insensibili in una sensibil distanza, e che in pari distanza dalle molecole che l'esercitano, sien sempre le stesse. Con queste due sole ipotesi, la prima delle quali è dimostrata dall'esperienza, e la seconda è per sè stessa evidente, Newton e i Fisici e Geometri che l'han poscia seguito, han potuto far vedere che in virtù dell'azione di quelle forze dovean sempre manifestarsi i tre principali fenomeni che la riflessione e la rifrazione della luce ci presentano, cioè 1. Che il raggio riflesso o rifratto debba sempre trovarsi in quel medesimo piano perpendicolare alla superficie riflettente o refringente, in cui trovasi il raggio incidente.

2. Che nella riflessione, tanto alla superficie anteriore che alla posteriore di un corpo riflettente, l'angolo di riflessione debba essere sempre eguale a quello d'incidenza; 3. Che nella rifrazione attraverso i corpi diafani debba mantenersi sempre costante, nel passaggio da un mezzo dato in un altro parimenti dato, la ragione del seno dell'angolo d'incidenza al seno dell'angolo di rifrazione.

2. Moltissimi sono poi certamente i fenomeni, oltre quei della riflessione e rifrazione della luce, che dipendono egualmente da queste attrazioni e ripulsioni sensibili soltanto nelle insensibili distanze, come la coesione, e tutte in genere le affinità chimiche; ma siamo tuttavia ben lontani dal poterci lusingare di assoggettare ancor questi, come i primi, all'impero dell'Analisi e della Geometria. Difatti si è riguardato meritamente come un passo di somma importanza nella teoria delle affinità chimiche quello che ha recentemente fatto il gran *Berthollet* dimostrando, che in esse doveva avere una massima parte la considerazione delle masse.

3. Era riserbato al sublime genio del Sig. *De la Place*, il quale con tutta verità può dirsi che nella sua insigne opera della *Meccanica celeste* abbia ridotto all'ultimo compimento quell'immenso edifizio, di cui l'immortale Newtono avea dato appena il disegno, era ad esso, dissi, riserbato di scoprire una nuova numerosa serie di fenomeni, dipendenti ancor essi dall'azione delle forze attraenti e ripellenti nelle minime insensibili distanze, più singolari, più variati, e suscettibili della medesima esatta analisi, che quei che presenta la luce. Sono questi i fenomeni dell'azione capillare, dei quali in un *Supplemento al libro X della Meccanica celeste* ha egli dato il primo la vera teoria spiegazione e misura per mezzo di quella stessa attrazione, che produce i fenomeni della riflessione e della rifrazione.

4. Avea già fatto qualche passo in questa carriera il gran *Clairaut* nel suo Trattato *sulla figura della Terra*, ove, dopo di aver vittoriosamente confutate le precarie spiegazioni de' fenomeni capillari date da *Jurin* e da altri Fisici, con quell'eleganza che caratterizza tutti i suoi lavori, intraprese il calcolo delle forze attraenti, che possono concorrere nell'innalzar l'acqua in un tubo di vetro. Egli non potè però mai dedurre dalle sue formole la dimostrazione della principal legge di quest'

ascen-

ascensione, che, secondo l'esperienza, dev'essere in ragione inversa del diametro del tubo, contentandosi di dire che infinite sono le leggi di attrazione, che sostituite nelle sue formole possono dar questo risultato. Ma ciò non basta, e bisogna assolutamente o stabilir queste leggi, o dimostrare che i risultati non ne dipendono, ad oggetto di connetter fra loro i diversi fenomeni della capillarità; e *Clairaut* ne avrebbe egli stesso agevolmente riconosciuto la necessità, se per es. passando dai tubi agli spazj capillari compresi tra due piani, si fosse provato di dedurre dalle sue formole quel rapporto di eguaglianza che presenta l'esperienza tra l'ascensione del fluido in un tubo cilindrico, e la sua ascensione tra due piani paralleli, la di cui mutua distanza sia eguale al semidiametro del tubo, fenomeno di cui nè egli nè altri han mai tentato darne la spiegazione.

5. Ciò che arrestò a mezza strada *Clairaut*, ed obbligollo a lasciar imperfetto il suo ben incominciato lavoro, si fu l'essersi egli fisso in capo che l'azione di un tubo capillare dovesse estendersi sino alla sottilissima colonnetta fluida che passa per l'asse del tubo, e contribuire sensibilmente a tenerla sospesa dentro di esso. O egli non conobbe, o non attese l'osservazione di *Hauksbée* e di altri Fisici, da cui risulta che ne' tubi di vetro, sieno egli sottilissimi nelle loro pareti, o di qualunque grossezza, l'acqua vi s'innalza sempre all'altezza medesima, purchè eguale ed il medesimo ne sia il diametro interiore. Quest'osservazione ocularmente dimostra che all'ascensione dell'acqua ne' tubi capillari niente contribuiscono gli strati cilindrici di vetro posti ad una sensibil distanza dall'interna superficie, benchè in ciascuno di essi separatamente preso l'acqua pure vi s'innalzerebbe. Nè vi sarà chi dica, che l'interposizione degli strati più prossimi impedisca l'azione de' più lontani; essendo troppo naturale il credere che le attrazioni capillari, a guisa della gravità, si trasmettono liberamente attraverso di qualunque corpo.

6. Ora quest'osservazione di *Hauksbée* doveva illuminare *Clairaut* e gli altri Fisici, e portarli naturalmente a pensare che l'attrazione della superficie interna del tubo non esercitandosi che ad un'impercettibil distanza, cioè soltanto sopra le molecole fluide immediatamente ad essa contigue, l'elevazione perciò o la depressione della colonnetta fluida dentro il

tubo medesimo non poteva esser sennonchè occasionalmente l'effetto della detta attrazione. Quest'attrazione non potea per sè stessa che alterare alcun poco l'orizzontalità delle molecole contigue immediatamente all'interna superficie; e così dar origine, mediante le forze ch'esercitano poi le molecole fluide così spossate le une sulle altre, a quella concavità o convessità che presenta la suprema superficie del fluido contenuto nel tubo. Esclusa poi l'attrazione del tubo come l'immediata cagione dell'elevazione o depressione capillare de' fluidi, cos'altro rimaneva sennonchè di ricercarne la causa in quelle forze che le molecole fluide, spossate alcun poco dall'attrazione del tubo, esercitano a vicenda le une sulle altre? Or quest'appunto è la felice idea che prima d'ogni altro ha avuto il Sig. *De la Place*, e che nelle sue mani ha procurato un nuovo splendidissimo trionfo all'attrazione Newtoniana non meno, che alla sublime e sottile Analisi, con cui ha saputo svilupparla.

7. Ma questa stessa sottile sublime Analisi, così famigliare e facile all'Autore dell'importante scoperta, e così poco intesa dalla comune de' Fisici ed anche de' Geometri, forma appunto il grande ostacolo che le impedirà di propagarsi, e di essere, come si merita, generalmente adottata. Non potendosi infatti senza di questo trascendente calcolo dimostrare quel mirabil consenso di questa teoria coll'esperienza, che ne forma la più vittoriosa ed irrefragabil pruova, non potrà essa mai aver luogo in un corso elementare di Fisica, sennonchè in compagnia, e come una di tante altre false e precarie ipotesi, che si sono ideate sinora per la spiegazione de' fenomeni capillari, o che potranno idearsene nell'avvenire, senza che vi sia il modo di far trionfare la vera, se non per pochi (*).

(*) Ci ha presentato recentemente una pruova di ciò che qui diciamo il celebre fisico Sig. Co: da *Rumford*, il quale rimproverato che fossero in opposizione colla teoria del Sig. *De la Place* alcune sue idee lette dinanzi all'Istituto nazionale di Parigi intorno all'adesione de' fluidi, e a una certa *pellicola* che, secondo lui, si forma alla loro superficie, ed è cagione, com'egli pensa, di molti fenomeni capillari, si trova molto imbarazzato per rispondere a quest'obbiezione, e non lo fa ch'esitando, e conchiudendo infine, che se i sublimi ed astrusi calcoli del Sig. *De la Place*, de' quali egli ingenuamente confessa di non poter vedere il fondo, conducessero a risultati contrarj alle sue idee, tanto è il rispetto che ha per quel gran Geometra, che egli sarà sempre pronto a sagrificarle, e a rinunciarvi. Ma potrà credersi sincera una sì gran deferenza alle altrui opinioni, non accompagnata da interna convizione; e se pur lo fosse, troverà poi il Sig. Co:

8. Mi venne in conseguenza in mente, dopo di aver letto l'Opuscolo del Sig. *De la Place*, che farei cosa utile alla scienza e alla scoperta, se prendessi a dilucidare ed appianare l'astrusa Analisi dell'Autore, per renderla così più accessibile ad un maggior numero di Fisici e Geometri di un rango inferiore. Ed accintomi coraggiosamente all'impresa, l'avea già condotta quasi al suo termine, allorchè mi si aprì dinanzi inaspettatamente una nuova strada di rendere il mio lavoro molto più proficuo, coll'abbassare cioè quella sublime teoria alla più

---

de *Rumford* tra i Fisici molti imitatori? Ecco intanto com'egli si esprime *(Bibl. Brit. mois de Mai* 1807. *Sciences et arts pag.* 3 *)*. *Je sais qu'il y a des personnes qui imaginent que les resultats des calculs de l'illustre Auteur de la* Mecanique cèleste *sur l'ascension des liquides dans les tubes capillaires, sont opposés aux opinions que j'ai publiées sur l'adhésion des molecules des liquides entr'elles; mais autant que j'ai pû comprendre les données qui fondent ces calculs, il me paroît évident que* l'attraction *dont M.r De la Place suppose que les molecules des liquides sont douées, ne différe pas essentiellement de la force que j'ai désignée sous le nom* d'adhesion; *et quant à la* pellicule *dont j'ai si souvent parlé, comme le calcul de ce savant géométre et physicien est fondé sur la supposition que les attractions mutuelles des molecules du liquide, qui se trouvent éloignées à une distance sensible de sa surface, ne contribuent en rien à l'ascension du liquide dans un tube capillaire, ainsi qu'autres effets analogues, qu' il a considerés, il me semble que les calculs de M.r De la Place portent uniquement sur la force de cohésion de la couche des molecules qui se trouvent à la surface, ou, en d'autres termes, sur la* pellicule, *dont il est question . . . Je dois pourtant avouer que je ne suis pas assez versé dans la haute Geometrie pour pouvoir bien comprendre les calculs de M.r De la Place sur ce sujet; et je me garderai bien de les juger. Il faudroit sans doute avoir une connoissance trés-profonde des méthodes analytiques, pour sentir la force de ses démonstrutions; mais j'ai une si haute idée des lumiéres de cet estimable savant, et comme géometre, et comme physicien, que je suis toûjours disposé à recevoir ses opinions en matiére de sciences, ainsi que sur tout autre objet, avec la plus grande déférence.*

Un altro più aperto oppositore alla sua teoria ha trovato positivamente il Sig. De la Place nel Sig. *Tardy de la Brossy*, il quale nel volume del prossimo passato Gennajo della medesima *Bibl. Brit.* ha fatto inserire un estratto di una lunga sua Memoria, il di cui oggetto si è appunto di escludere dalla spiegazione de' fenomeni capillari ogni attrazione propriamente detta ed ogni affinità, e di stabilire ch'essa debba unicamente ripetersi dalla differenza tra la forza di adesione che le molecole de' fluidi hanno coi corpi che toccano, e di quella che le lega tra loro. Risuscitando pertanto gli esplosi principj di *Jurin* egli si studia colla più piana sintesi di dedurre da questa sua immaginata causa le leggi non solo de' più noti fenomeni capillari, ma di alcuni tra quelli altresì, che prima del Sig. *De la Place* si erano rimasti senza veruna spiegazione. Benchè per altro il Sig. *Tardy de la Brossy* in questa sua contraddizione alla teoria del Sig. De la Place non faccia, secondo che osserva il Redattore della sua Memoria, che usare del diritto già da gran tempo da lui acquistato, di non arrendersi, cioè, che molto difficilmente a quanto vi ha di più certo ed evidente tra' Fisici, nondimeno noi crediamo che l'inaccessibilità de' sublimi calcoli, coi quali ha svolta la sua teoria il Sig. *De la Place*, abbia non poco contribuito a questa sua opposizione.

semplice ed elementare Geometria. L'occasione me la presentò il primo problema che prende a risolvere il Sig. *De la Place* nel bel principio del suo Opuscolo, cioè di determinare l'azione di una sfera attraente sopra di un sottilissimo filo fluido posto fuori di essa, e ad essa perpendicolare. Ingegnosissima e degna di lui è l'Analisi ch'egli adopera per la soluzione del suo problema; ma quest'Analisi medesima sembra poi che venga e debba di necessità venir meno, allorchè si tenta applicarla al problema analogo, in cui il filo fluido tocchi internamente la sfera attraente, ch'è appunto il caso che unicamente ha luogo ne' fenomeni capillari, benchè a primo aspetto ognun crederia che i due problemi non sono che due casi di un problema stesso. Il Sig. *De la Place* infatti abbandonando la via tenuta per risolvere il primo, dà del secondo una soluzione per così dire indiretta, la quale, a dir vero, non pare immune da ogni dubbio, nè appaga l'animo pienamente.

9. Ora quest'apparente o vera imperfezione dell'ingegnosissimo metodo adoperato dal Sig. *De la Place* nella soluzione del suo primo problema, di non potersi cioè applicare a tutti i casi del problema medesimo, e di escluderne principalmente quello che unicamente si presenta ne' fenomeni capillari, sembrandomi come una macchia in una sì bella ed elegante teoria, mi spronò a cercare, se fosse possibile, qualche altra via di soluzione, la quale, benchè cedesse nell'eleganza e nell'artificio a quella del Sig. *De la Place*, fosse però immune dalla mentovata limitazione. E dopo breve ricerca una me se ne presentò così elementare e semplice, che la sua stessa semplicità me la rese dapprincipio sospetta, non sembrandomi quasi possibile che non si fosse subito ad altri affacciata, e per ragione non meno della sua generalità che della sua semplicità ad ogni altra preferita. Incoraggito dal buon esito di questo primo tentativo, m'innoltrai all'altro più generale problema dell'attrazione di un corpo terminato da una qualunque superficie, e quindi alla spiegazione e misura di tutti quei fenomeni della capillarità, che successivamente si esaminano dal Sig. *De la Place*; e tutte queste ricerche mi si appianarono ancor esse, e si assoggettarono, come le prime, all'uso della più comune ed elementare Geometria.

10. Ho creduto pertanto che farei cosa utile nel pubblicare questo mio lavoro, che ad altro non mira sennonchè a

rendere a tutti accessibile e generale la cognizione scientifica della più grande ed importante scoperta fisico-matematica, e della più luminosa e trionfante applicazione dell'attrazione, che dopo i tempi dell'immortale Newtono siasi ancor fatta. Sarà questo mio qualsiasi lavoro diviso in tre parti. Esaminerò nella I.ª parte per quali ragioni e quando la superficie superiore di un fluido rinchiuso in un tubo o dentro due piani, debba prendere ora la figura convessa, ed ora la concava, giacchè questa convessità o concavità è quella che principalmente determina la depressione o l'ascensione del fluido, e tutte le altre circostanze de' fenomeni capillari. In questa prima ricerca non mi allontanerò che poco dal metodo seguito dall'illustre Autore, limitandomi per lo più a dilucidarlo soltanto e commentarlo. Mi è sembrato più naturale d'incominciare da questa ricerca, benchè dall'Autore venga essa trattata in ultimo luogo. Passo quindi nella II.ª parte a determinare l'azione di un corpo sferico, o di qualunque figura, sopra di un sottilissimo filo fluido, che perpendicolarmente lo tocchi o al di dentro o al di fuori, che è appunto il problema da cui incomincia l'Autore; e finalmente applico nella III.ª parte i risultati di questo problema alla spiegazione e misura de' tanto diversi e singolari fenomeni capillari, che dall'Autore vengono considerati. E in queste due ultime parti appunto, che sono le più importanti della teoria, ed in piena proprietà appartengono al Sig. *De la Place* (giacchè nella I.ª egli era stato prevenuto da *Clairaut*) abbandonando intieramente la difficile e sublime Analisi con cui egli le ha trattate, perchè non confacente a quei per i quali scrivo, sieguo io costantemente quel nuovo elementare geometrico discorso, che fortunatamente mi si è presentato.

PARTE I.

Per quali ragioni e quando la superficie di un fluido rinchiuso in un tubo, o tra due piani, debba prender la forma concava o convessa.

11. Dipendendo, secondo questa teoria, tutti i fenomeni capillari dalla concavità o convessità della superior superficie del fluido, fa d'uopo primieramente ricercare d'onde derivi

questa concavità o convessità del fluido contenuto in un tubo, o compreso tra due piani. Questa, siccome abbiam poc' anzi accennato, dee ripetersi dall'attrazione che il tubo esercita sopra il fluido, paragonata e combinata con quella con cui il fluido agisce sopra di sè stesso. Ora supponendo, siccome sembra naturale di dover supporre, che queste due attrazioni non differiscano che nella loro intensità, e seguano d'altronde la stessa legge d'incremento o di decremento nel variar delle distanze, cioè supponendo che ad una medesima distanza le due forze esercitate sopra di una molecola elementare del fluido da una molecola elementare del tubo e da una molecola elementare del fluido sieno sempre tra loro in una costante ragione, cioè in quella delle intensità di quelle forze, che chiameremo φ e φ', facendo, come dicevamo, questa ben naturale supposizione, sarà facile di dimostrare i seguenti teoremi.

12. TEOREMA I. *Se* $\varphi = \frac{1}{2}\varphi'$, *cioè se l'intensità della forza attraente della materia del tubo sarà eguale alla metà di quella del fluido, la superficie di questo rinchiuso nel tubo medesimo, o tra due piani della stessa materia, manterrassi piana ed orizzontale.*

Dim. Consideriamo un qualunque punto O (*Fig.* 1) della superficie che supporremo orizzontale, compreso dentro i limiti della sfera d'azione della materia del tubo: sarà questo punto attratto insieme dal tubo, e dal fluido che in esso è contenuto. Ora ciascuna delle molecole R della superficie interna del tubo poste al disotto del livello MN del fluido, e compresa dentro la detta sfera d'azione, agirà sopra di O con una forza più o meno obbliqua OR, che potrà risolversi al solito nelle tre Of, ft, tR parallele a tre assi ortogonali che s'intendon condotti per O, o per qualunque altro punto, cioè due orizzontali, una parallela e l'altra perpendicolare ad Op, e la terza verticale e parallela ad Or. Dalla somma di tutte queste forze, distruggendosi in tutta la sfera di azione le ft, perchè a ciascuna corrisponde dall'altra parte del piano OpD la sua eguale e contraria, ne risulteranno due forze uniche, una orizzontale parallela ad Op, l'altra verticale parallela ad Or; ed è evidente che queste due forze verranno espresse da due funzioni della distanza Op moltiplicate per l'intensità φ. Chiamando adunque y ed x queste funzioni di Op, le due forze

colle quali la molecola fluida O è attratta orizzontalmente e verticalmente dalla materia del tubo posta al disotto del livello MN, saranno ϕy, ϕx.

Egli è poi evidente che queste medesime saranno le forze, colle quali verrà attratta la medesima molecola O dalla materia del tubo posta al disopra del livello MN; sennonchè la forza verticale ϕx dovrà esser presa col segno contrario, perchè agisce in senso contrario della prima. Saranno dunque ϕy, $-\phi x$ le due forze orizzontale e verticale, dalle quali la molecola O verrà attratta dalla materia del tubo situata al di sopra di MN.

Per determinare ora l'azione del fluido sopra la medesima molecola O, prendasi primieramente $Op' = Op$, e condotta la verticale $p'D'$, egli è chiaro che si distruggeranno a due a due, perchè eguali e contrarie, le attrazioni orizzontali di tutte le molecole comprese nello spazio cilindrico $Dpp'D'$, e poste a due a due alla medesima distanza dall'asse Or, ed in una linea che passi per lo stesso asse. Non potrà dunque risultare dall'azione delle molecole comprese in questo spazio, che un'azione verticale nella direzione Or, la quale potrà esprimersi, come prima, per $\phi' z$, cioè per il prodotto dell'intensità ϕ' con una funzione z di Op.

Riguardo poi all'attrazione che le molecole fluide contigue alla superficie cilindrica $p'D'$ esercitano sopra la molecola O, egli è evidente che siccome queste molecole hanno precisamente rispetto ad O la stessa posizione che le molecole della materia del tubo contigue alla superficie cilindrica pD e poste al disotto di MN, quindi l'attrazione tant'orizzontale che verticale delle une a quella delle altre dovrà stare come l'intensità dell'attrazione di una delle due materie all'intensità dell'attrazione dell'altra; cosicchè essendo ϕy, ϕx l'attrazione orizzontale e verticale della parte inferiore del tubo, l'attrazione orizzontale e verticale della materia fluida contigua a $p'D'$ verrà espressa da $\phi' y$, e $\phi' x$, o piuttosto $-\phi' y$, e $\phi' x$, perchè $\phi' y$ agisce in direzione contraria a ϕy.

Raccogliendo adunque tutte queste forze, la molecola O verrà sollecitata dalle forze orizzontali

$$\phi y, \phi y, -\phi' y$$

e dalle forze verticali

$$\phi x, -\phi x, \phi' z, \phi' x.$$

Le prime danno la forza orizzontale unica $(2\varphi - \varphi')y$, e le seconde l'unica forza verticale $\varphi'(z+x)$. Ora è evidente che se sarà $2\varphi = \varphi'$, ossia $\varphi = \frac{1}{2}\varphi'$, cioè l'intensità della forza attraente della materia del tubo due volte minore di quella del fluido, riducendosi a zero la forza orizzontale $(2\varphi - \varphi')y$, non rimarrà che la forza verticale $\varphi'(z+x)$, la quale inoltre, non contenendo φ, cioè l'intensità della materia del tubo, ma unicamente dipendendo da φ' intensità dell'attrazione del fluido sopra sè medesimo, sarà perciò per qualunque molecola la medesima, giacchè ogni molecola è attratta egualmente dal fluido circostante. In quest'ipotesi adunque di $\varphi = \frac{1}{2}\varphi'$, ogni molecola della superficie che si suppone orizzontale, sarà sollecitata da un'egual forza perpendicolare alla superficie, onde vi sarà equilibrio, e la superficie resterà com'era, piana ed orizzontale. C.C.D.D.

13. Che se la forza orizzontale $(2\varphi - \varphi')y$ non sarà $= 0$, ma una quantità positiva, cioè diretta da O verso p, la risultante di questa forza e della forza verticale devierà dalla verticale Or verso di pD, onde perchè questa risultante sia perpendicolare alla superficie del fluido, siccome richiedono le leggi dell'equilibrio, questa superficie dovrà inclinarsi in O all'orizzonte al disopra di Op e al disotto di Op', cioè divenir concava; e viceversa se $(2\varphi - \varphi')y$ sarà una quantità negativa, cioè diretta da O verso p', la risultante delle due forze orizzontale e verticale dovrà deviare da Or verso p'D', epperò la superficie del fluido in O, per esser perpendicolare a questa risultante, dovrà abbassarsi sotto di Op ed alzarsi sopra di Op', cioè divenir convessa.

14. Si meritano però questi due casi di essere più distintamente considerati ed analizzati ne' due seguenti teoremi, ne' quali supponendo la superficie del fluido concava o convessa, si assegnano le condizioni, e si stabilisce il rapporto delle intensità delle due forze il quale deve aver luogo, perchè il fluido rimanga in equilibrio nell'uno e nell'altro caso. Prima però bisogna più accuratamente e più generalmente determinare di quel che si è fatto per un caso particolare nella dimostrazione del teorema precedente, quali sieno le forze che esercita sopra di una molecola A (*Fig.* 2) posta ad un'insensibil distanza dalla linea MR, la materia attraente compresa tra i due piani MN, MO che si tagliano nella suddetta linea MR, e

forman

forman tra loro un qualunque angolo $PMQ = NRO = hAg = \theta$. Si vogliano per es. le forze che da quest'attrazione ne nasceranno nella direzione AB posta nel piano MN e perpendicolare ad MR, e in una direzione perpendicolare tanto al piano MN che alla linea AB nel punto A. Con un raggio Aa eguale al limite dell'attrazione sensibile, e che faremo $= 1$, si descriva nel piano MN il semicircolo abc, il quale girando attorno del diametro ac generi uno spicchio sferico, ed incontri il piano MO in afc. Il punto b in questa rotazione avrà descritto l'arco bf, che sarà misura dell'angolo fatto dai due piani, cioè $= \theta$. Suppongasi quest'arco bf accresciuto del suo elemento ff', cioè il semicircolo afc trasportato in $af'c$, e insieme con esso il piano MO, girando attorno di MR per un angolo infinitesimo, la di cui misura è $ff' = \delta\theta$. Lo spicchio sferico infinitesimo $afcf'a$, se si consideri come composto di tante piramidi infinitesime terminanti nel centro A, e poste a due a due ad egual distanza da Af, sarà chiaro che le attrazioni di ciascuna coppia di queste piramidi infinitesime, comecchè eguali ed egualmente inclinate ad Af, daranno una risultante che passerà per Af, onde anche la risultante di tutte le attrazioni della materia compresa nello spicchio sferico infinitesimo $afcf'a$ passerà pure per Af ossia per Ag.

Egli è poi egualmente evidente che quest'attrazione, qualunque ne sia la legge, dovrà esser proporzionale alla sua intensità che chiameremo φ, moltiplicata per l'angolo compreso dallo spicchio sferico infinitesimo, cioè per $\delta\theta$, dappoichè crescendo l'intensità φ, o l'angolo infinitesimo $\delta\theta$, deve anche crescere l'attrazione dello spicchio nella proporzione. Assumendo adunque un'adattata quantità costante K, dall'azione di tutte le molecole comprese nello spicchio sferico infinitesimo $afcf'a$, ne risulterà sopra della molecola A un'unica forza nella direzione Ag, ed $= \varphi K \delta\theta$.

Rappresentisi questa forza colla Ag, e condotta la gh normale al piano MN e alla AB, la medesima forza risolverassi nelle due $Ah = Ag \cos.\theta = \varphi K \delta\theta \cos.\theta$, e $gh = Ag \operatorname{sen}.\theta = \varphi K \times \delta\theta \operatorname{sen}.\theta$, la prima delle quali sarà diretta, siccome si richiede, secondo AB, e la seconda sarà normale al piano MN e ad AB in A; ed è evidente che per avere le forze intiere esercitate nelle medesime direzioni sopra di A da tutta la materia attraente compresa tra i due piani, bisognerà integrare le ritro

vate espressioni in modo che gl'integrali svaniscano, quando i due piani MN, MO cadono l'uno sull'altro, cioè quando $\theta = 0$.

Sarà dunque finalmente l'attrazione secondo la AB esercitata sopra la molecola A dalla materia compresa tra i due piani $= \int \varphi K \partial\theta \cos.\theta = \varphi K \operatorname{sen}.\theta$, e l'altra perpendicolare al piano MN e alla AB in A $= \int \varphi K \partial\theta \operatorname{sen}.\theta = \varphi K (1 - \cos.\theta)$.

15. Che se l'angolo θ sarà retto, epperò $\operatorname{sen}.\theta = 1$, $\cos.\theta = 0$, tanto l'attrazione nella direzione AB presa nel piano MN e perpendicolare ad MR, quanto l'altra perpendicolare ad MN e ad AB, saranno tutte due $= \varphi K$. Quindi se il piano MN ed AB saranno verticali, φK rappresenterà l'attrazione tanto verticale che orizzontale, che la materia contenuta tra il piano MN, e un altro ad esso perpendicolare sopra di MR, esercita sopra la molecola A contigua ad MR.

Ciò premesso si dimostreranno agevolmente i seguenti teoremi, che abbiam qui sopra annunciati.

16. TEOREMA II. *Supponendo concava la superficie del fluido contenuto in un tubo, o rinchiuso tra due piani, perchè il fluido sia in equilibrio, dev'essere* $2\varphi - \varphi'$ *una quantità positiva, cioè* $\varphi > \frac{1}{2}\varphi'$.

Dim. Rappresenti CAB (*Fig.* 3) un piano verticale tuffato nel fluido MNB; e a questo caso potrà ridursi anche quello di un tubo, considerandone l'interna superficie divisa in tanti piani verticali d'infinitamente piccola larghezza, corrispondente al raggio della sensibile attrazione. Sia AR la sezione della superficie concava del fluido contiguo, fatta da un piano verticale normale al primo. Chiamando, come prima, φ l'intensità dell'attrazione della materia del piano, e K un'adattata quantità costante, la parte inferiore AB del piano eserciterà sopra la molecola fluida A (§. 15) un'attrazione verticale all'ingiù $= \varphi K$, e un'attrazione orizzontale verso M parimenti $= \varphi K$; e lo stesso sarà della parte superiore AC del piano, sennonchè la forza verticale sarà $-\varphi K$, perchè diretta all'insù al contrario della forza verticale che nasce dalla parte inferiore, mentre l'orizzontale diretta verso M sarà, come per la parte inferiore, $= \varphi K$.

Ma condotta la tangente AD alla curva concava AR, la molecola A è inoltre attratta dalla materia fluida contenuta nell'angolo BAD; e chiamando θ quest'angolo, φ' l'intensità dell'attrazione del fluido, e ritenendo la solita costante K,

dalla forza attrattiva di questa porzione di fluido nascerà (§. 14) una forza verticale $= \vec{\varphi}'K \operatorname{sen}.\theta$, ed una forza orizzontale $= -\vec{\varphi}' \times K(1 - \cos.\theta)$, che si prende negativamente, perchè diretta verso N, cioè dalla parte opposta delle altre due $\vec{\varphi}K$, e $\vec{\varphi}K$.

Finalmente bisogna anche considerare l'attrazione che nelle minime distanze esercita sopra la molecola A quella piccola porzion di fluido che riman compresa tra la curva AR e la tangente AD. Supponghiamo che ne nasca da quest'attrazione una forza Q, la di cui direzione sia AQ; e chiamando π l'angolo QAB, questa forza Q si risolverà al solito in due, una verticale all'ingiù $= Q \cos.\pi$, e l'altra orizzontale diretta verso N, epperò negativa, ed $= -Q \operatorname{sen}.\pi$.

Raccogliendo pertanto tutte queste forze, la molecola A sarà animata dalle forze verticali

$$\vec{\varphi}K, \ -\vec{\varphi}K, \ \vec{\varphi}'K \operatorname{sen}.\theta, \ Q \cos.\pi$$

e dalle forze orizzontali

$$\vec{\varphi}K, \ \vec{\varphi}K, \ -\vec{\varphi}'K(1 - \cos.\theta), \ -Q \operatorname{sen}.\pi$$

che daranno, essendo sommate, la forza unica verticale $\vec{\varphi}'K \times \operatorname{sen}.\theta + Q \cos.\pi$, e la forza unica orizzontale $2\vec{\varphi}K - \vec{\varphi}'K + \vec{\varphi}'K \cos.\theta - Q \operatorname{sen}.\pi$.

Da queste due forze ne nascerà una sola forza risultante AV, la quale, per le note leggi di equilibrio, dev'esser perpendicolare alla curva AR ossia alla tangente AD in A. Se dunque questa forza si risolverà nelle due AT, AS, una verticale, l'altra orizzontale, la prima $= AV \cos.VAT = AV \operatorname{sen}.BAD = AV \operatorname{sen}.\theta$, e la seconda $= AV \cos.VAS = AV \times \cos.BAD = AV \cos.\theta$, dovendo queste forze essere eguali alle due poc'anzi trovate, si avranno l'equazioni

$$AV \operatorname{sen}.\theta = \vec{\varphi}'K \operatorname{sen}.\theta + Q \cos.\pi$$

$$AV \cos.\theta = 2\vec{\varphi}K - \vec{\varphi}'K + \vec{\varphi}'K \cos.\theta - Q \operatorname{sen}.\pi$$

e quindi dalla prima moltiplicata per $\cos.\theta$ togliendo la seconda moltiplicata per $\operatorname{sen}.\theta$

$\vec{\varphi}'K \operatorname{sen}.\theta - 2\vec{\varphi}K \operatorname{sen}.\theta + Q \cos.\pi \cos.\theta + Q \operatorname{sen}.\pi \operatorname{sen}.\theta = 0$, ossia $Q(\cos.\pi \cos.\theta + \operatorname{sen}.\pi \operatorname{sen}.\theta)$, cioè $Q \cos.(\pi - \theta) = (2\vec{\varphi} - \vec{\varphi}')K \operatorname{sen}.\theta$.

Ora nel caso in cui siamo che la curva AR sia concava, l'angolo $\pi - \theta = DAQ$ è positivo e minore di 90°, onde il primo membro dell'ultima equazione $Q \cos.(\pi - \theta)$ è necessariamente positivo. Sarà dunque positivo anche il secondo $(2\vec{\varphi} - \vec{\varphi}')K \operatorname{sen}.\theta$, e siccome è pur positivo $\operatorname{sen}.\theta$ come seno di un angolo acuto, sarà anche positivo $2\vec{\varphi} - \vec{\varphi}'$, cioè $\vec{\varphi} > \frac{1}{2}\vec{\varphi}'$.

Se dunque la superficie del fluido AR sarà concava, perchè vi sia equilibrio tra le forze attraenti, dovrà essere $\varphi > \frac{1}{2}\varphi'$. C.C.D.D.

17. Se si supporrà $2\varphi - \varphi' = 0$, cioè $\varphi = \frac{1}{2}\varphi'$, diverrà $= 0$ il secondo membro dell'ultima equazione, epperò anche il primo. Sarà dunque $Q \cos.(\pi - \theta) = 0$, epperò anche $Q = 0$, cioè svanirà la forza attraente del fluido compreso tra la curva AR e la tangente AD, ciò che non può accadere se non quando la curva AR intieramente si confonde colla sua tangente AD, cioè quando la superficie AR da concava divien piana. Si conferma così ciò che si è dimostrato al *Teor. I.* (§. 12), cioè ch'essendo $\varphi = \frac{1}{2}\varphi'$, la superficie del fluido si mantiene piana ed orizzontale.

18. TEOREMA III. *Supponendo che la superficie del fluido contenuto in un tubo o rinchiuso tra due piani sia convessa; perchè si mantenga in equilibrio, dovrà essere* $2\varphi - \varphi'$ *una quantità negativa, cioè* $\varphi < \frac{1}{2}\varphi'$.

Dim. Sia AR (*Fig.* 4) la superficie convessa del fluido, e fatta la stessa costruzione del *teor. prec.*, e chiamando θ l'angolo BAD, e π l'angolo BAQ, in primo luogo si dimostrerà allo stesso modo, che la molecola fluida A verrà attratta dalla parte superiore ed inferiore del piano BAC con due forze verticali φK, $-\varphi K$, e con due forze orizzontali verso M, eguali a $-\varphi K$, $-\varphi K$, alle quali diamo il segno negativo, perchè la forza orizzontale che nasce dalla risultante AV sarà ora diretta verso la parte opposta N.

L'azione del fluido sopra la medesima molecola A risulta poi in questo caso dalla differenza tra le due azioni ch'esercitano sopra la stessa molecola il fluido contenuto nell'angolo CAD, e quello contenuto tra la curva AR e la tangente AD. Dalla prima nascerà (§. 14) una forza verticale all'ingiù $= \varphi' K \times$ sen. CAD $= \varphi' K$ sen. BAD $= \varphi' K$ sen. θ, ed una forza orizzontale verso N, ed $= \varphi' K (1 - \cos. CAD) = \varphi' K (1 + \cos. BAD) = \varphi' K (1 + \cos. \theta)$; e dalla seconda, come nel *teor. prec.* ne nascerà una forza Q, che si risolverà in una forza verticale all'insù $= -Q \cos. \pi$, ed una forza orizzontale verso N, ed $= Q$ sen. π. Quindi dall'azione del fluido rinchiuso nello spazio CAR risentirà la molecola A una forza verticale all'ingiù $= \varphi' K \times$ sen. $\theta + Q \cos. \pi$, ed una forza orizzontale verso N $= \varphi' K \times (1 + \cos. \theta) - Q$ sen. $\pi = \varphi' K + \varphi' K \cos. \theta - Q$ sen. π.

Raccogliendo tutte queste forze, si avrà l'unica forza verticale

$$\varphi' K \text{ sen. } \theta + Q \text{ cos. } \pi$$

e l'unica forza orizzontale

$$\varphi' K + \varphi' K \text{ cos. } \theta - Q \text{ sen. } \pi - 2\varphi K .$$

Ora queste due forze, come nel *teor. prec.*, dovranno essere rispettivamente eguali alla forza verticale AT, e alla forza orizzontale AS, nelle quali si risolve la risultante AV perpendicolare ad AD, cioè eguali ad AV cos. VAT = AV sen. BAD = AV sen. θ, e ad AV sen. VAT = AV cos. BAD = AV cos. θ. Si avranno dunque le due equazioni

$$AV \text{ sen. } \theta = \varphi' K \text{ sen. } \theta + Q \text{ cos. } \pi$$

$$AV \text{ cos. } \theta = \varphi' K + \varphi' K \text{ cos. } \theta - Q \text{ sen. } \pi - 2\varphi K$$

dalle quali precisamente, come nel *teor. prec.* si otterrà

$$Q \text{ cos. } (\pi - \theta) = (\varphi' - 2\varphi) K \text{ sen. } \theta$$

e quindi, dovendo esser positive le quantità Q, sen. θ, e cos. $(\pi - \theta)$ nel caso della curva AR convessa, dovrà anch' esser positiva la quantità $\varphi' - 2\varphi$, ossia nella supposizione che la superficie del fluido rinchiuso in un tubo o tra due piani sia convessa, poichè il fluido possa restare in equilibrio, dovrà esser $2\varphi < \varphi'$, cioè $\varphi < \frac{1}{2}\varphi'$. C. C. D. D.

19. Riunendo adunque insieme i risultati de' tre precedenti teoremi, si vede che la superficie del fluido in un tubo, sarà piana concava o convessa, secondo che φ sarà eguale, maggiore o minore di $\frac{1}{2}\varphi'$.

20. Questa concavità o convessità però non sarà la medesima, ma diversa secondo i diversi fluidi che riempiranno un medesimo tubo. Considerando infatti un punto I (*Fig.* 3 *e* 4) posto sulle curve concave o convesse corrispondenti a diversi fluidi, ed alla medesima distanza dal tubo dentro i limiti della sua sfera di attività, l'attrazione del tubo sopra di questo punto I sarà sempre la medesima ed orizzontale (§§. 16 e 18), ma non sarà così dell'attrazione de' diversi fluidi, la quale dee variare dall'uno all'altro, secondo la diversa loro intensità rispettiva φ' tanto nella direzione orizzontale che nella verticale (§§. citt.). Componendosi dunque quest'azione sempre diversa coll'azione sempre costante del tubo, diversa ancora dovrà essere la direzione della risultante; onde, siccome questa per l'equilibrio dev'esser perpendicolare al corrispondente elemento della superficie, diversa perciò dovrà essere, secondo i di-

versi fluidi, la giacitura di quest' elemento, cioè diversa la curva AR.

21. Diversa dunque sarà ancora, secondo i diversi fluidi in un medesimo tubo, l' inclinazione de' lati estremi della curva AR rispetto alle pareti del tubo. Essa però sarà la medesima, col medesimo fluido e colla medesima materia del tubo, qualunque sia il diametro interno di questo. Imperocchè potendosi considerare come piana la superficie di questo compresa dentro il raggio della sua sfera di attività sensibile, il fluido verrà attratto da questa come se fosse piana, epperò sempre allo stesso modo, qualunque ne sia il suo diametro; onde combinandosi quest' azione, sempre la medesima, con quella parimenti sempre costante del fluido immediatamente ad essa contiguo e compreso dentro i limiti dell' azion sensibile, dovrà sempre aversi la medesima risultante, epperò la stessa inclinazione de' lati estremi rispetto alle pareti del tubo.

22. Oltrepassato l' insensibile limite dell' attività sensibile, il fluido rimanente sottoposto quasi unicamente all' azione della gravità, e a quella che esercita sopra di sè medesimo, prenderà naturalmente nella sua superficie la figura di un segmento sferico, i di cui piani estremi, confondendosi con quei della superficie nel fluido ai limiti della sfera di attività sensibile del tubo, saranno perciò presso a poco egualmente inclinati alle pareti ne' diversi tubi. Sembra dunque potersene conchiudere che questi segmenti sferici saran tutti simili tra loro, se lo stesso sia il fluido, e la stessa la materia del tubo, qualunque ne sia poi il diametro interno, purchè capillare.

23. Dalla dimostrazione del *Teor. II* (§. 16) risulta che la forza verticale che sollecita la molecola A (*Fig.* 3) niente dipende da φ, mentre la forza orizzontale contiene il termine positivo $(2\varphi - \varphi')$ K, che sarà tanto più grande, quanto sarà più grande φ in confronto di $\frac{1}{2}\varphi'$. Ora crescendo la forza orizzontale diretta verso M, e rimanendo la medesima la verticale, tanto più la direzione della forza risultante dovrà divergere superiormente dalle pareti del tubo, onde dovendo questa risultante esser normale alla superficie, tanto più concava diverrà la superficie stessa. La concavità pertanto della curva AR sarà tanto maggiore quanto maggiore del rapporto di eguaglianza sarà il rapporto di φ a $\frac{1}{2}\varphi'$, cosicchè con un certo valore di φ sempre maggiore di $\frac{1}{2}\varphi'$, la superficie del fluido dovrà

acquistare la concavità di una mezza sfera. Crede il Sig. *De la Place* che ciò accadrà quando sia $\varphi = \varphi'$, ed eccone la sua dimostrazione.

Sia, dic'egli, la superficie concava di un fluido rinchiuso in un tubo quella di una mezza sfera ABC (*Fig.* 5), e figurandoci terminata l'intiera sfera ABCS, supponghiamo che si riempia del medesimo fluido anche la parte del tubo RACS superiore a questa sfera. Essendo $\varphi = \varphi'$, cioè l'intensità dell'attrazione della materia del tubo eguale a quella del fluido, si potrà perciò supporre che il tubo sia della medesima materia del fluido; ed allora certamente, prescindendo dalla gravità, dalla quale si può prescindere ne' tubi capillari, sarà in equilibrio tutta la materia fluida ed omogenea che circonda la sfera vuota ABCS, perchè tutti i punti della superficie interna di questa saranno animati da forze eguali e perpendicolari alla superficie stessa. Ora sopprimendo il fluido che abbiamo concepito superiormente aggiungersi RASC, non potrà risultarne che un insensibile cangiamento, tanto nella quantità, che nella direzione delle forze che animano i diversi punti dell'emisferico-concava superficie fluida rimanente ABC. Imperocchè l'azione esercitata sopra di A dal fluido compreso nell'angolo infinitesimo RAS fatto dalla tangente e dall'arco, non estendendosi che ad un' infinitamente piccola distanza, non potrà essere che incomparabilmente più piccola di quella che vi esercita la materia del tubo compresa dentro di un angolo retto (§§. 14 e 15), oltre di che all'azione verticale di questo fluido soppresso può supplire l'attrito del fluido contro le pareti del tubo; e molto più piccola e più trascurabile sarà poi l'azione del fluido soppresso RASC sopra gli altri punti posti ad una sensibil distanza del fluido rimanente ABCNM. Questo fluido rimanente pertanto si manterrà in equilibrio, anche dopo soppresso il fluido superiore RASC; vale a dire che la superficie del fluido prenderà la concavità di una mezza sfera, quando suppongasi $\varphi = \varphi'$.

24. Che se sarà $\varphi > \varphi'$, cioè l'intensità dell'attrazione del tubo sopra il fluido maggiore di quella del fluido sopra di sè stesso, crede in questo caso il Sig. *De la Place* che il fluido attaccandosi alle pareti interne del tubo vi formi un velo e come un altro tubo il quale solo attragga il fluido, onde si ritorni al caso precedente di $\varphi = \varphi'$, e debba perciò anche in

questo caso la superficie prender la concavità di una mezza sfera. E questo sembragli essere il caso dell'acqua, degli olj, e di tutti i fluidi in fine che possono o per sè stessi o coi loro vapori umettare il vetro, siccome fu poi confermato dall'esperienze che a sua istanza intraprescro i diligentissimi Fisici i Signori *Haüy* e *Tremery*, ad oggetto appunto di determinare la curva in cui si dispongono tutti questi fluidi rinchiusi dentro a tubi capillari. Misurando essi infatti la distanza dal fondo del punto più alto in cui questi fluidi toccano le pareti interne de' tubi ed incominciano a staccarsene, e quella del punto di mezzo più basso della loro concavità, ritrovarono sempre la differenza di queste due distanze pressochè eguale al semidiametro de' tubi, siccome doveva esserlo supponendo emisferica quella concavità, ed il piccolo difetto che vi rinvennero, doveva certamente attribuirsi alla difficoltà che vi ha di fissare con precisione, e di non prender sempre al disotto del vero quel punto in cui il fluido si distacca dalla parete interna del tubo.

Sembra dunque potersi assumere con tutta sicurezza che le superficie concave dell'acqua, degli olj, e generalmente di tutti i fluidi che umettano il vetro, debbano essere emisferiche ne' tubi capillari.

25. Passando ora al caso di $\varphi < \frac{1}{2}\varphi'$, la dimostrazione che abbiam data del *Teor. III* (§. 18) in quest'ipotesi fa vedere che rimanendo la stessa la forza verticale da cui è sollecitata la molecola A (*Fig.* 4) e la quale non dipende da φ, la forza orizzontale per lo contrario diretta verso N contiene il termine positivo $(\varphi' - 2\varphi)$K, il quale sarà tanto maggiore quanto più sarà piccolo φ relativamente a φ', e crescendo poi così la forza orizzontale verso N, mentre la verticale rimane costante, tanto più dovrà crescere la convessità della curva AR. Questa convessità diverrà infine quella di una mezza sfera, allorchè sarà φ insensibile e quasi nulla in confronto di φ'; ed ecco come lo dimostra il Sig. *De la Place* con un discorso analogo a quello per il caso della concavità, esposto al §. 23.

Supponghiamo, dic'egli, che veramente la superficie del fluido prenda la figura di una mezza sfera convessa ASC (*Fig.* 5). Continuandola al disotto di A s'intenda formata, la sfera intiera ASCB, e sopprimendo per un momento col pensiero il fluido ABCNM posto al disotto di questa sfera, e prescindendo dall'

dall'azione del peso che ne' tubi capillari in confronto delle altre forze attraenti è insensibile, e da quella del tubo che ora si considera pure come nulla per essere φ quasi nullo rispetto a φ', egli è chiaro che la sfera inticra, epperò anche la superficie della mezza sfera superiore ASC sarà in equilibrio, perchè tutti i suoi punti saranno animati da eguali forze attraenti del fluido, perpendicolari alla superficie stessa. Si ristabilisca ora il fluido soppresso ABCNM, e si dimostrerà come al §. 23, che l'azione del fluido MAB sulla molecola A, e molto più sugli altri punti della superficie ASC posti ad una maggior distanza, sarà insensibile e trascurabile in confronto di quella che vi esercita tutta la sfera. L'equilibrio adunque tuttavia sussisterà; cioè essendo φ incomparabilmente minore di φ', la superficie del fluido prenderà la convessità di una mezza sfera.

La rapidità con cui si riunisce in rotondissimi globetti il mercurio sparso sopra il vetro od altri corpi, ci dimostra visibilmente quanto sia maggiore l'attrazione ch' esso esercita sopra di sè medesimo di quella che risente dagli altri corpi. Ci presenta dunque il mercurio il caso di φ enormemente minore e quasi nulla in confronto di φ'; e diffatti i sovraccitati Fisici (§. 24) con quel medesimo metodo col quale si assicurarono della concavità emisferica dell'acqua e degli olj, si convinsero altresì che la convessità in cui si dispone dentro a' tubi capillari il mercurio, era quella di una mezza sfera.

26. Riepilogando pertanto i principali risultati che abbiamo ottenuti relativamente alla concavità o convessità della superficie de' fluidi rinchiusi in tubi capillari, si rileva che da $\varphi = 0$, nel qual caso si ha la convessità di una mezza sfera, sino a $\varphi = \frac{1}{2}\varphi'$, la superficie diviene sempre meno convessa, e finalmente si fa piana ed orizzontale nel limite estremo di $\varphi = \frac{1}{2}\varphi'$, ed oltrepassato poi questo limite diviene sempre più concava sino a che, essendo $\varphi = \varphi'$, giugne alla concavità emisferica, la quale conserva ancora dopo di quel limite, cioè essendo $\varphi > \varphi'$, perchè il fluido umetti le pareti interne del tubo.

PARTE II.

Dell'attrazione esercitata da un corpo di figura qualunque sopra di un sottilissimo filo fluido interno od esterno, rinchiuso in un canaletto perpendicolare alla sua superficie.

27. Egli è un volgare e notissimo principio idrostatico, che *se una massa fluida* M (*Fig.* 6) *sollecitata da quelle forze che si vorranno, sarà in equilibrio, immaginando un canaletto* AB *qualunque, dentro di essa, perpendicolare per es. alla superficie esteriore del fluido in* A *e* B, *la somma delle forze che sollecitano la molecola* A *nella prima direzione* AC *del canaletto, dovrà essere eguale alla somma delle forze che sollecitano* B *nella contraria direzione* BD. Infatti se una delle due somme prevalesse, per es. quella che anima A, siccome questa forza per l'indole del fluido si trasmette intiera alla molecola B nella direzione BE, questa molecola dovrebbe muoversi verso E colla differenza delle due forze che l'agitano in direzioni contrarie, e l'equilibrio sarebbe però disturbato.

Questo principio idrostatico, che ci servirà di guida nell' esame e spiegazione di tutti i fenomeni capillari, ha bisogno, per essere applicato, che si sappian calcolare le forze che animano le estremità di un canaletto, ovunque esso si concepisca. Abbiamo escluso dal calcolo di queste forze l'attrazione delle pareti del tubo o de' piani che rinchiudono il fluido, poichè quest'attrazione non agisce che sull'insensibile velo fluido che tocca le dette pareti, e ad una distanza impercettibile divenendo affatto insensibile, solo influisce su quella concavità o convessità che prende il fluido esteriormente. Farà d'uopo pertanto cercar queste forze, che animano le estremità del canaletto suddetto, nelle attrazioni che vi esercita la stessa massa fluida in equilibrio, e terminata in una superficie ora piana, ora concava ed ora convessa, a tenore delle leggi, che si sono stabilite nella *I.ª Parte*. E questo appunto è ciò che ora ci proponghiamo di fare ne' seguenti Teoremi.

28. TEOREMA IV. Se *un sottilissimo filo fluido venga attratto da un corpo terminato da una superficie piana, ch' esso tocchi perpendicolarmente o al di dentro o al di fuori, sarà nell' uno e nell' altro caso attratto egualmente, e con una forza costante, che chiameremo* K.

Dim. Il sottilissimo filo fluido AR (*Fig.* 7) tocchi al di dentro la superficie piana BD di un corpo attraente OS. Con un raggio AB eguale alla distanza in cui termina di esser sensibile l'attrazione s'intenda dal centro A descritta una mezza sfera BCD, la di cui azione sopra di A sarà diretta, com'è evidente, da A verso R. Ora se il filo fluido *ar* sarà posto al di fuori del corpo attraente *of* la di cui superficie piana è *bd*, descritta dal centro *a* col medesimo raggio la mezza sfera *bcd*, l'azione sopra di *a* dipenderà da questa mezza sfera, e sarà diretta da *a* verso *c*, ed eguale a quella con cui l'eguale mezza sfera BCD attrae A da A verso R.

Si prendano ora due punti E ed *e* egualmente lontani da A ed *a*, e s'intendan descritti da questi centri, e con un raggio eguale ad AB, *ab*, i segmenti sferici FLM, *flm*. Si prenda inoltre EI = AE, e condotta HK parallela a BD, egli è evidente che le due fette sferiche FGNM, GHKN, eguali simili e similmente poste rispetto ad E, attrarranno egualmente ma in parti contrarie questo punto E, onde niun effetto risulterà da queste attrazioni. Sarà dunque il punto E unicamente attratto dal segmento sferico HLK, e lo sarà come il punto *e* lo è dal segmento sferico *flm*, in parte contraria, giacchè, essendo per costruzione EI = *ae*, epperò IL = *al*, i due segmenti sferici HLK, *flm* sono anche eguali simili e similmente posti rispetto ai punti attratti E ed *e*.

Tutti i punti adunque tanto del filo fluido interno AR, quanto dell'esterno *ar*, egualmente lontani dai punti estremi A ed *a*, sono egualmente attratti in una direzione normale alla superficie del corpo a cui sono contigui, e questo sino a che le distanze AE, *ae* di questi punti diverranno eguali al raggio AB od *ab* dell'attrazione sensibile, nel qual caso svaniranno i due eguali segmenti HLK, *flm*, e cesserà ogni attrazione.

Sarà pertanto la somma delle attrazioni, dalle quali il filo fluido interno AR è spinto all'ingiù, eguale alla somma delle attrazioni dalle quali è attratto all'insù il filo esterno *ar*, onde anche l'attrazione totale nel primo caso sarà eguale all'attrazione totale nel secondo, e sì l'una che l'altra sarà sempre costante e la medesima, e potrà perciò farsi = K. C.C.D.D.

29. Ma nelle attrazioni capillari si producono delle concavità e delle convessità, disposte per lo più nella figura di mezze sfere o di segmenti sferici (§. 26), ond'è necessario

saper calcolare le attrazioni che risentir dee da una massa fluida terminata da una superficie concava o convessa un sottilissimo filo fluido interno od esterno, e perpendicolare alla superficie di quella massa attraente. Qualunque però sia la concavità o convessità di questa superficie, egli è evidente che intendendo un piano tangente della medesima nel punto di contatto del filo fluido attratto, epperò a questo normale, l'attrazione della massa fluida risulterà dalle due attrazioni, della massa cioè terminata dal piano tangente, e del menisco compreso tra questo piano e la superficie, e ne sarà la somma o la differenza, secondochè la massa fluida sarà la somma o la differenza delle due masse, e secondochè le due attrazioni agiranno verso la medesima, o verso le opposte parti. Esprimendo dunque colla costante K (§. 28) l'attrazione della massa fluida terminata dal piano tangente, mancherà solo di esprimere convenientemente quella del menisco, per aver l'attrazione totale che si cerca. E a questo appunto sono diretti i seguenti teoremi.

30. TEOREMA V. *L'attrazione di un Menisco sferico sopra di un sottilissimo filo fluido esterno rispetto alla sfera e perpendicolare al Menisco nel punto di contatto del piano tangente e della sfera, può esprimersi con* $\frac{H}{b}$, *essendo* H *un' adattata quantità costante, e b il raggio della sfera.*

Dim. Sia PV (*Fig.* 8) il filo fluido attratto, OP ovvero O'P il raggio della sfera, e TZ il piano tangente di essa. Considerando i menischi come generati dalla rivoluzione degli spazj QPN, ovvero qPN attorno il diametro della sfera, si potranno riguardare come composti d'infiniti strati cilindrici concentrici generati dalla rivoluzione delle QN, qN. Ora se avranno un sensibil valore i raggi OP, O'P, e PN sia dentro i limiti di quell'insensibil distanza in cui è sensibile l'attrazione, le QN, qN, prossimamente eguali a $\frac{PN^2}{2OP}$, e $\frac{PN^2}{2O'P}$, avranno un' insensibil valore rispetto a PN, e molto più rispetto al filo fluido PV. Quindi tutti i punti delle QN, qN, e delle superficie cilindriche da esse generate avranno sensibilmente la stessa distanza e posizione rispetto a tutte le molecole componenti il filo fluido PV, epperò le attrazioni da esse esercitate sopra qualunque molecola di questo filo fluido saranno sensibilmente

proporzionali alle masse attraenti, cioè alle medesime superficie cilindriche generate dalla rivoluzione delle QN, qN. Ma queste superficie cilindriche sono proporzionali alle QN, qN, e queste QN, qN, allorchè PN è molto piccola rispetto al raggio OP od O'P, sono sensibilmente in ragion reciproca de' medesimi raggi OP, O'P. Dunque le attrazioni esercitate dalle superficie cilindriche generate da QN, qN sopra qualunque molecola del filo fluido PV, sono in ragion reciproca de' raggi OP, O'P. Queste attrazioni delle corrispondenti superficie cilindriche de' due menischi reciprocamente proporzionali ai corrispondenti raggi OP, O'P, agiscono obbliquamente da sotto in sù; ma risolvendole al solito in attrazioni orizzontali e verticali dirette all'insù, facilmente si vedrà che le prime si distruggono, perchè ciascuna ha la sua eguale e contraria nella parte della superficie cilindrica diametralmente opposta rispetto al punto di contatto P, mentre le forze verticali, per esser QN, qN infinitamente piccole rispetto alle loro distanze dalla molecola attratta, saranno nella stessa ragione delle forze obbliquе dalle quali nascono, cioè in ragion reciproca de' rispettivi raggi OP, O'P.

Ora siccome lo stesso può dimostrarsi di tutte le altre corrispondenti superficie cilindriche generate dalle SX, fX ec., ne siegue che nella medesima ragion reciproca de' raggi OP, O'P staranno ancora tra loro le somme delle attrazioni verticali dirette all'insù esercitate da tutte le superficie cilindriche componenti i due menischi, cioè le attrazioni stesse de' due menischi prodotti dalla rivoluzione degli spazj circolari QPT, qPT attorno il diametro della sfera. Assumendo pertanto un'adattata quantità costante H, e chiamando b il raggio OP di una sfera, l'attrazione del menisco interposto tra la sfera del raggio b e il piano tangente TZ sopra il filo fluido PV esterno rispetto alla sfera, potrà essere espressa da $\frac{H}{b}$. C.C.D.D.

31. L'attrazione del corpo RZ terminato dalla superficie piana TZ sopra il filo fluido esterno PV, potendosi esprimere colla costante K (§. 28), ed essendo evidentemente quest'attrazione eguale alla somma delle due attrazioni dirette verso la medesima parte all'insù, del menisco cioè $\frac{H}{b}$, e di quella della sfera, sarà perciò l'attrazione di una sfera del raggio OP$=b$

sopra il filo fluido esterno PV ad essa normale, espressa da $K - \frac{H}{b}$.

32. E questa pure sarà l'espressione dell'attrazione di un segmento sferico di sensibil grandezza SPM formato tagliando la sfera con un piano SM normale alla direzione del filo fluido esterno ed attratto PV; giacchè tutto il rimanente della sfera posta al disopra di SM, ritrovandosi ad una distanza sensibile da PV, non potrà che insensibilmente influire sulla totalità dell'attrazione verticale risentita dall'attratta colonnetta.

33. E sarà pure la medesima l'espressione dell'attrazione della massa fluida FPGLH terminata da una concavità emisferica FPG sopra il filo fluido interno e normale PV; giacchè questa risulta dall'attrazione all'ingiù della massa fluida TL terminata dalla superficie piana TZ ch'è $= K$ (§. 28), e dall'attrazione all'insù del menisco emisferico FPGZT, ch'è $= \frac{H}{b}$ (§. 30), onde l'attrazione totale all'ingiù sarà $= K - \frac{H}{b}$.

34. E per la ragione addotta al §. 32 l'istessa pure sarà l'attrazione all'ingiù esercitata sopra il filo fluido interno PV da una massa fluida SPMKI, la di cui superficie sia quella di un segmento sferico concavo di qualunque grandezza SPM.

35. Dovendo esser certamente sempre positiva l'espressione $K - \frac{H}{b}$ dell'attrazione della sfera del raggio b sopra un filo fluido esterno ad essa normale, sarà perciò $\frac{H}{b}$ sempre $< K$, qualunque sia il valore di b. Ma d'altronde il valore di $\frac{H}{b}$ può crescere in qualunque ragione, supponendo che nella medesima ragione si diminuisca il raggio della sfera b, e ciò non ostante dovrà sempre rimanere $< K$. Dunque avendo il raggio b della sfera un qualunque sensibil valore, $\frac{H}{b}$ non solamente sarà $<$, ma incomparabilmente $< K$; cioè l'attrazione di un menisco sopra di un filo fluido normale ed esterno rispetto alla sfera, è incomparabilmente minore di quella che vi esercita un corpo terminato da una superficie piana.

36. Teorema VI. *L'attrazione di un Menisco sopra di un filo fluido ad esso normale ed interno rispetto alla sfera, è espressa ancora da* $\frac{H}{b}$, *essendo* b *il raggio della sfera, ed* H *la medesima quantità costante del Teorema antecedente.*

Dim. Se sarà $O''P = OP = b$, e se supporremo come prima le PN, PX comprese dentro i limiti dell'attrazione sensibile, le Q'N, S'X eguali alle QN, SX avranno un insensibil valore rispetto alle PN, PX, e molto più rispetto ad O''P, PV; onde le superficie cilindriche generate dalle Q'N, S'X avranno sensibilmente la stessa posizione rispetto a PV, che le superficie cilindriche generate dalle QN, SX, e perciò sì le une che le altre eserciteranno l'istessa attrazione sopra di PV e nella stessa direzione, onde anche l'attrazione verticale del menisco generato dalla rivoluzione dello spazio TPQ' sopra il filo fluido interno PV, sarà $= \frac{H}{b}$ e diretta da V verso P, siccome fu trovata nel *Teor. precedente* esser quella del menisco prodotto dalla rivoluzione di QPT sopra il filo fluido esterno PV. C.C.D.D.

37. Esprimendo dunque negativamente l'attrazione di questo menisco, cioè con $-\frac{H}{b}$, perchè diretta in senso contrario di K, l'attrazione della sfera del raggio $O''P = b$ sopra il filo fluido interno PV, che dev'essere eguale alla differenza delle due attrazioni del corpo terminato da una superficie piana e del menisco, sarà perciò $= K + \frac{H}{b}$.

38. E la stessa pure sarà l'attrazione sopra il medesimo filo fluido PV esercitata dalla massa fluida IS'PM'K rinchiusa in un canaletto di sensibil larghezza IK e di una qualunque sensibil lunghezza, e terminante in una superficie convessa S'PM' di segmento sferico; dappoichè potendosi trascurare l'attrazione di tutta la rimanente materia della sfera attraente del raggio O''P, perchè posta tutta a sensibili distanze da PV, e potendosi aggiugnere fuori della sfera quella materia che si vuole, l'attrazione della massa fluida IS'PM'K sopra di PV sarà sensibilmente la stessa che quella dell'intiera sfera, cioè $K + \frac{H}{b}$.

39. Quindi generalmente l'attrazione di un corpo terminato da una porzione sensibile di superficie sferica sopra di un filo fluido posto nella direzione del suo asse, sarà $K \pm \frac{H}{b}$, valendo il segno + nel caso della superficie convessa, e nell' altro della concava il — (§§. 34 e *prec.*).

40. Ma l'attrazione capillare dà spesso origine a superficie concave, convesse, od anche concavo-convesse, che molto si allontanano dalla figura sferica, come per es. nel caso di una gocciola attratta tra due piani che forman tra loro un piccolo angolo, nel quale, come vedremo, la circonferenza della gocciola prende la figura di una gola di puleggia, cioè convessa nella direzione della circonferenza, e concava in una direzione alla prima normale, potendo anch' essere i raggi di convessità e di concavità molto diversi tra loro. Per generalizzare adunque la ricerca de' due precedenti teoremi, ed estenderla a tutti i casi possibili, è necessario determinare ancora l'attrazione di un menisco formato da una qualunque superficie, e dal piano tangente della medesima nel punto in cui il filo fluido attratto gli è perpendicolare. Due casi distingueremo, che partitamente esamineremo ne' due seguenti teoremi, cioè che la superficie curva formante il menisco sia una superficie di rivoluzione attorno di un asse posto nella direzione del filo fluido, oppure che il solido a cui appartiene la superficie formante il menisco, non sia un solido di rivoluzione. In questo secondo caso la Geometria c'insegna che le diverse sezioni che per il punto di contatto possono farsi nella superficie hanno in quel punto diversi raggi osculatori, e che tra questi due ve ne sono uno *Massimo* e l' altro *Minimo*, i quali appartengono a due sezioni che sono poste, l'una rispetto all'altra, ad angoli retti. Nel primo caso al contrario tutte le sezioni avranno nel punto di contatto del filo fluido il medesimo raggio osculatore, cioè quello della curva generatrice.

41. TEOREMA VII. *Se il Menisco venga formato dalla superficie di un solido di rivoluzione attorno di un asse, e da un piano tangente nell' estremità di quest' asse, la sua attrazione sopra di un filo fluido esterno od interno rispetto alla superficie e a questa normale, sarà pure espressa da* $\frac{H}{b}$, *essendo b il raggio osculatore*

nel

nel punto di contatto, ed H *la medesima quantità costante de'* Teoremi antecedenti.

Dim. Dovendo avere ogni sezione della superficie, nell' estremità P dell'asse di rivoluzione, il medesimo raggio osculatore OP, ovvero $O''P = b$, egli è evidente che dentro i limiti dell'attrazione sensibile il segmento SPM ovvero S'PM' si confonderà ed identificherà con un segmento sferico, e il menisco attraente formato dalla superficie di un qualunque solido di rivoluzione, e dal piano tangente nell'estremità dell'asse, dentro i medesimi limiti, si confonderà col menisco sferico del raggio b. Quindi l'attrazione dell'uno sarà la stessa che quella dell'altro, cioè $\frac{H}{b}$ (§§. 30 e 36). C.C.D.D.

42. Quindi I.° L'attrazione di un qualunque solido di rivoluzione sopra di un filo fluido esterno posto nel prolungamento dell'asse sarà $= K - \frac{H}{b}$ (§. 31). II.° E la stessa pure sarà l'espressione dell'attrazione di un qualunque segmento sensibile del detto solido, formato con un piano normale all'asse di rivoluzione (§. 32). III.° Siccome sarà pure la stessa l'espressione dell'attrazione di un corpo qualunque terminato da una superficie concava di rivoluzione sopra di un filo fluido interno posto nel prolungamento dell'asse (§. 33). IV.° Sarà però $K + \frac{H}{b}$ l'attrazione di un solido di rivoluzione, o di un segmento sensibile di esso, rispetto a un filo fluido interno posto lungo l'asse di rivoluzione (§. 37). V.° E questa medesima sarà l'attrazione esercitata da una massa fluida, terminata da una superficie convessa di rivoluzione, rispetto a un filo fluido interno situato nella direzione dell'asse (§. 38).

43. Teorema VIII. *Se il Menisco sia formato da una superficie qualunque, e da un piano tangente, e che il* massimo *raggio osculatore delle sezioni della superficie per il punto di contatto sia* b, *e il* minimo b', *l'attrazione del Menisco sopra di un filo fluido, esterno od interno rispetto alla superficie, e normale al Menisco nel punto di contatto, verrà espressa da* $\frac{H}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right)$ *essendo* H *la medesima quantità costante de'* Teoremi antecedenti.

Dim. Se intenderemo, come nel *Teor. V.* (§. 30), sopra la circonferenza del circolo che ha per raggio PN eretta una

superficie cilindrica dentro il menisco, questa non avrà dappertutto la medesima altezza QN, come nel caso della sfera, ma sotto il *massimo* raggio osculatore che ha per raggio O'P, in due punti diametralmente opposti, avrà un'altezza *minima* qN; sotto il *minimo* il di cui raggio è OP, in due punti 90° lontani dai primi, avrà una *massima* altezza QN, ed avrà poi delle altezze intermedie in tutti gli altri punti intermedj. Questa superficie cilindrica adunque verrà terminata superiormente non da una circonferenza circolare del raggio PN, come nel caso di una superficie sferica, ma da una curva a doppia curvatura; e se s'intenderà questa superficie cilindrica svolta e ridotta in un piano, essa prenderà la figura $q'tq''t'q'''n'''n'$, la di cui base $n'n'''$ sarà eguale alla circonferenza del raggio PN, ed avendo divisa questa base in quattro parti eguali $n'u$, un'', $n''u'$, $u'n'''$, le altezze corrispondenti ai punti n', u, n'', u', n''', cioè $q'n'$, tu, $q''n''$, $t'u'$, $q'''n'''$ saranno alternativamente eguali a qN, QN.

Ma attesa la piccolezza di PN, che non può superare l'infinitamente piccola distanza in cui è sensibile l'attrazione, potendosi considerare come rettilinei i lati $q't$, tq'', $q''t'$, $t'q'''$ di questa figura, ne risulta che l'area della medesima sarà sensibilmente eguale al prodotto di $n'n'''$, cioè della circonferenza del raggio PN, per la semisomma delle due $q'n'$, tu, ossia qN, QN; laddove se si trattasse di una sfera del raggio O'P, la corrispondente superficie cilindrica eretta sopra la circonferenza del raggio PN, sarebbe eguale al prodotto di questa medesima circonferenza moltiplicata per qN. Sopprimendo adunque il moltiplicatore comune, cioè la circonferenza del raggio PN, queste due superficie staranno tra loro in ragione di $\frac{1}{2}(q\text{N} + \text{QN}) : q\text{N}$.

Ora allo stesso modo che ne' teoremi antecedenti potendosi considerare tutte le varie altezze di queste superficie cilindriche come infinitamente piccole e come punti in confronto delle distanze dalle molecole attratte del filo fluido PV, le attrazioni delle due anzidette superficie cilindriche sopra di qualunque molecola del filo fluido saranno in ragione delle superficie medesime, cioè delle masse attraenti. Sarà dunque la massa attraente, cioè l'azione sul filo fluido PV della prima superficie cilindrica, alla massa attraente ossia all'azione della seconda sul medesimo filo fluido, come $\frac{1}{2}(q\text{N} + \text{QN}) : q\text{N}$;

ossia, potendosi dimostrare come al *Teorema V.* (§. 30) che $qN = \frac{\overline{PN}^2}{2O'P}$, $QN = \frac{\overline{PN}^2}{2OP}$, l'una attrazione starà all'altra, togliendo il fattor comune $\frac{\overline{PN}^2}{2}$, come $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{O'P} + \frac{1}{OP}\right) : \frac{1}{O'P}$; ovvero finalmente facendosi il *massimo* raggio osculatore $O'P = b$, il *minimo* $OP = b'$, queste due attrazioni staranno fra loro come $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) : \frac{1}{b}$.

Si dimostrerà poi come nel cit. *Teor. V.* che in questa medesima ragione in cui stanno le attrazioni obblique esercitate sopra qualunque molecola del filo fluido, staranno pure le forze verticali che ne nascono nella direzione del filo fluido medesimo, distruggendosi anche in questo caso le forze orizzontali. Imperocchè quantunque le altezze dello strato cilindrico non siano ora in tutto il giro le medesime, sono però le medesime ne' punti diametralmente opposti rispetto al punto di contatto, siccome appartenenti alla sezione che ha il medesimo raggio osculatore. Ora ciò basta perchè le forze orizzontali che ne nascono sieno eguali e contrarie, epperò si distruggano; mentre le forze verticali, attesa la piccolezza delle qN, QN rispetto a PN, PV, rimarranno tra loro nell'istesso rapporto delle obblique dalle quali nascono, cioè nel rapporto trovato di $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) : \frac{1}{b}$.

Potendosi dunque dimostrare lo stesso di tutte le corrispondenti superficie cilindriche componenti il menisco formato da un qualunque corpo i di cui raggi osculatori *massimo* e *minimo* in P sono b e b', ed il menisco sferico del raggio $O'P = b$, ne risulterà che l'attrazione del primo menisco sopra il filo fluido PV, all'attrazione sopra il medesimo filo fluido del menisco sferico, starà parimenti come $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) : \frac{1}{b}$; cosicchè essendo quest'ultima (§. 30) $= \frac{H}{b}$, intendendo per H una costante, la prima cioè quella del proposto menisco avente in P per *massimo* e *minimo* raggio osculatore b e b', sarà $\frac{H}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right)$. C.C.D.D.

44. Sarà dunque I.° $K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)$ l'azione esercitata sopra di un filo fluido esterno e normale da un corpo qualunque, o da un qualunque suo segmento, in cui il *massimo* e *minimo* raggio osculatore per il punto di contatto sieno b e b' (§§. 31 e 32). II.° E questa pure sarà l'attrazione sopra di un filo fluido interno e normale, esercitata da una massa fluida terminata da una qualunque superficie concava, le di cui sezioni nel punto di contatto del filo fluido abbiano parimenti b e b' per *massimo* e *minimo* raggio osculatore (§. 33). III.° Sarà però $K + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)$ l'espressione di quest'attrazione, se la massa attraente venga terminata da una superficie convessa qualunque avente, come sopra, per *massimo* e *minimo* raggio osculatore b e b' (§§. 31 e 38).

45. Se si prenderanno le $q'^{v}n'^{v}$, $t''u''$ equidistanti da $q'n'$, tu, cosicchè sia $n'^{v}u'' = n'u = 90°$ della circonferenza del raggio PN, saranno esse le altezze della superficie cilindrica componente il menisco eretta sopra di questa circonferenza, e corrispondenti a due sezioni della superficie curva del menisco le quali si tagliano ad angolo retto. Ora chiamando B e B' i raggi osculatori di queste due sezioni, siccome si sono trovate le $q'n'$, tu, ossia $q\mathrm{N}$, QN, eguali a $\frac{\overline{\mathrm{PN}}^2}{2\mathrm{O'P}}$, $\frac{\overline{\mathrm{PN}}^2}{2\mathrm{OP}}$, ossia $\frac{\overline{\mathrm{PN}}^2}{2b}$, $\frac{\overline{\mathrm{PN}}^2}{2b'}$, essendo b e b' i raggi osculatori delle sezioni che corrispondono a $q'n'$, tu, così essendo ora B e B' i raggi osculatori delle sezioni corrispondenti a $q'^{v}n'^{v}$, $t''u''$, saranno queste eguali a $\frac{\overline{\mathrm{PN}}^2}{2\mathrm{B}}$, $\frac{\overline{\mathrm{PN}}^2}{2\mathrm{B'}}$. Ma è evidentemente $q'n' + tu = q'^{v}n'^{v} + t''u''$. Dunque togliendo il fattor comune $\frac{\overline{\mathrm{PN}}^2}{2}$, sarà anche $\frac{1}{b}+\frac{1}{b'} = \frac{1}{\mathrm{B}}+\frac{1}{\mathrm{B'}}$; epperò l'azione del menisco che si è trovata $= \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right) = \frac{H}{2b}+\frac{H}{2b'}$ sarà anche $= \frac{H}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{B}}+\frac{1}{\mathrm{B'}}\right) = \frac{H}{2\mathrm{B}}+\frac{H}{2\mathrm{B'}}$, cioè l'azione di un menisco formato da una superficie qualunque e da un piano tangente sarà eguale (§§. 30 e 36) alla semisomma delle azioni di due menischi sferici nascenti da due sfere, i raggi delle quali sieno, uno il raggio osculatore di una sezione qualunque della superficie del proposto menisco fatta da un piano perpendico-

lare a questa superficie, e l'altro il raggio osculatore della sezione fatta da un piano normale al primo.

46. Quindi essendo $K-\frac{H}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)=K-\frac{H}{2}\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{B'}\right)$ la metà della somma di $K-\frac{H}{b}$, $K-\frac{H}{b'}$, ovvero di $K-\frac{H}{B}$, $K-\frac{H}{B'}$, sarà anche (§. 44, I.° e II.°) l'attrazione di un corpo qualunque sopra di un filo fluido esterno, ovvero di una massa fluida terminata da una qualunque superficie concava sopra di un filo fluido interno e normale, eguale alla semisomma delle attrazioni di due sfere o di due segmenti sferici dei raggi B e B' (§§. 31 e 32); e lo stesso pure sarà dell'attrazione $K+\frac{H}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)$ ossia $K+\frac{H}{2}\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{B'}\right)$ di un corpo qualunque (§. 44. III.°) terminato da una superficie convessa sopra di un filo fluido interno ad essa perpendicolare (§§. 37 e 38).

47. Ma quale sarà l'attrazione di un corpo terminato da una superficie, la quale in qualunque punto, come nella gola di una puleggia, e come vedremo accadere in una goccia attratta tra due piani, sia convessa in una certa direzione, e concava in un'altra perpendicolare alla prima? Le comuni regole del calcolo insegnano che basterà in questo caso cambiare il segno del raggio osculatore che passa dalla parte opposta allorchè la superficie, che si considerava dapprima come concava, divien convessa, cosicchè se b sia questo raggio, rimanendo b' nella parte concava, l'attrazione di un corpo terminato da una siffatta superficie concavo-convessa, invece di essere, come nel caso della superficie tutta concava $K-\frac{H}{2}\left(\frac{1}{b'}+\frac{1}{b}\right)$ (§. 44, II.°) sarà ora $K-\frac{H}{2}\left(\frac{1}{b'}-\frac{1}{b}\right)$.

Dai nostri principj e dal nostro metodo anche questa trasformazione di formola, di cui dovremo valerci in appresso, discende molto agevolmente. Sia, come nel *Teorema*, $n'u$ un quarto della base circolare di una delle superficie cilindriche componenti il menisco, (ed il discorso si trasporterà facilmente alle intiere superficie cilindriche, e ai menischi che ne risultano) la quale esista nel piano tangente il proposto solido, ove la superficie concava si separa dalla convessa, rimanendo

quella al disopra, e questa passando al di sotto. Restando dunque, come prima, al disopra di $n'u$ l'altezza tu della superficie cilindrica corrispondente al *minimo* raggio di concavità, e passando per lo contrario al di sotto di $n'u$ l'altezza $q^v n'$ corrispondente al *minimo* raggio di convessità, condotta la $q^v t$ che tagli $n'u$ in z, il triangolo tuz denoterà quella porzione che rimane di superficie cilindrica al di sopra del piano tangente e che attrae il filo fluido all'insù, mentre il triangolo $q^v n'z$ esprimerà una porzione di superficie cilindrica che attrae parimenti il filo fluido all'insù, ma che si sottrae dal solido terminato dal piano tangente di esso. Per ragione adunque di questo triangolo sottratto l'attrazione K all'ingiù della parte della massa attraente terminata dal piano tangente dovrà accrescersi, e non iscemerà che per ragione del triangolo aggiunto e posto nella parte concava della superficie tzu. Ma nel caso che la superficie terminante il solido attraente sia tutta concava, la diminuzione di K in questo medesimo quarto di superficie cilindrica nasce dall'attrazione all'insù di tutto il trapezio aggiunto sopra il piano tangente, cioè $tq'n'u$. Dunque per questo quarto di superficie cilindrica, epperò anche per l'intiera superficie, la diminuzione di K nel primo caso alla diminuzione di K nel secondo starà come $tuz - q^v n'z : tq'n'u = \frac{1}{2}(tu - q^v n') \times n'u : \frac{1}{2}(tu + q'n').n'u = tu - q^v n' : tu + q'n'$, cioè (essendo come prima tu, e $q^v n' = q'n'$ proporzionali ad $\frac{1}{b'}$ ed $\frac{1}{b}$) $= \frac{1}{b'} - \frac{1}{b} : \frac{1}{b'} + \frac{1}{b}$. E l'istesso potendosi dimostrare di tutte le altre superficie cilindriche, ne risulta che nella stessa ragione dovrà stare la diminuzione totale di K nel primo caso a quella nel secondo; cosicchè essendosi trovata in quest'ultimo (§. 44, II.°) la diminuzione suddetta $= \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b'} + \frac{1}{b}\right)$, nel primo dovrà essere $\frac{H}{2} \times \left(\frac{1}{b'} - \frac{1}{b}\right)$, cioè l'attrazione di una massa fluida terminata da una superficie concavo-convessa sopra di un filo fluido interno normale alla superficie in un punto ove il raggio della concavità sia b', e b quello della convessità, verrà espressa da $K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b'} - \frac{1}{b}\right)$.

48. Il metodo geometrico, piano ed elementare, che in questa II.ª Parte abbiamo sostituito all'analitico adoperato dal

Sig. *De la Place*, ingegnoso certamente, ma forse troppo astruso e difficile per il maggior numero de' Fisici, sembra raccomandarsi per la sua generalità non meno che per la sua semplicità, e noi confidiamo che per questi due titoli quell' insigne Geometra sarà per onorarlo della sua autorevole approvazione.

PARTE III.

Spiegazione e misura de' principali e più singolari fenomeni capillari.

49. Dobbiamo ora far uso della teoria dell' attrazione capillare stabilita nelle due precedenti *Parti*, per dedurne la spiegazione e la misura de' diversi più singolari fenomeni, che la capillarità ci presenta; ed il mirabil consenso tra i risultati teorici che troveremo, e quei delle esperienze che andremo di mano in mano accennando, formeranno della premessa teoria il più pieno trionfo e la più completa dimostrazione. Ci studieremo anche in questa *Parte*, come abbiam fatto nella II.ª, di semplicizzare ed abbassare alla più comune intelligenza la sublime Analisi dell' Autore che abbiam preso ad illustrare.

Articolo I.

Dell' innalzamento ed abbassamento de' fluidi ne' tubi capillari cilindrici.

50. È questo il più noto ed ovvio fenomeno dell' azion capillare, siccome la legge che siegue quest' innalzamento od abbassamento, cioè di essere, supposta la medesima la materia del tubo ed il fluido, sensibilmente in ragione inversa del diametro interno del tubo. Ora dalla premessa teoria molto agevolmente si deduce questa medesima legge.

Abbiamo veduto infatti che dal rapporto delle intensità delle attrazioni della materia del tubo e del fluido dipende unicamente la concavità o convessità della superficie superiore del fluido (§§. 12, 13, 16, 18, 19), che i lati estremi di queste curve concave o convesse, essendo la medesima la materia del tubo ed il fluido, fanno i medesimi angoli colle pareti del tu-

bo (§. 21), e che le curve stesse ne' tubi capillari sono semicircolari o almeno simili tra loro (§. 22, e segg.). Ciò supposto, sia NOM (*Fig.* 9) la superficie superiore per es. concava del fluido rinchiuso in un tubo capillare: intendendo che passi per O un sottilissimo canaletto perpendicolare alla curva NOM, il quale ripiegandosi orizzontalmente in ZR sotto il tubo, sorga poi verticalmente sino a un punto V del fluido adjacente, ove non sia più sensibile l'attrazione del tubo, le leggi dell'equilibrio idrostatico esigono che le pressioni che soffrono le estremità di questo canaletto in V ed O sieno eguali tra loro (§. 27). Ora prescindendo dalla pressione dell'atmosfera, la quale è sensibilmente la stessa in V e in O, il punto V è spinto da V verso R dall'azione della massa fluida terminata nella superficie piana AV, azione che abbiamo chiamata K (§. 28), mentre il punto O è attratto da O verso Z dall'azione della massa fluida NFEM terminante nella superficie concava NOM, la quale azione si è trovata $= K - \frac{H}{b}$ (§§. 33 e 42, III.°), intendendo per b il raggio osculatore della curva in O. Sarà dunque la prima forza maggiore della seconda della quantità $\frac{H}{b}$, epperò il fluido dovrà sollevarsi dentro il tubo sino all'altezza OP, cioè sino a tanto che il peso del filo fluido sollevato OP compensi ed eguagli l'eccesso di quella prima forza. Infatti chiamando g la gravità specifica del fluido, e prendendo per unità la base del filo fluido OP, il peso di questo sarà $g.OP$; onde la pressione che da O si trasmetterà in V, la quale prima era $K - \frac{H}{b}$, si accrescerà di questa medesima quantità, e diverrà $K - \frac{H}{b} + g.OP$. Perchè dunque vi sia il richiesto equilibrio, dovrà essere la pressione in V, ch'è sempre $K = K - \frac{H}{b} + g.OP$, cioè $g.OP = \frac{H}{b}$.

Che se la superficie superiore del fluido sia convessa, come N'O'M', l'azione del fluido sul canaletto normale alla curva in O' sarà $K + \frac{H}{b}$ (§. 38 e 42, V.°), ond'essa prevarrà sulla pressione K in V, e per istabilire l'equilibrio il fluido dovrà abbassarsi dentro il tubo sino in O', cosicchè condotta l'oriz-

l'orizzontale O'R', la pressione K in V trasmessa in O' si accresca di $g.VR' = g.O'P$, e sia $K + g.O'P = K + \frac{H}{b}$, cioè di nuovo $g.O'P = \frac{H}{b}$.

Si avrà dunque tanto nel caso della curva concava, quanto della convessa, l'innalzamento od abbassamento OP od O'P al di sopra o al di sotto del livello $= \frac{H}{gb}$, epperò essendo, per una data materia del tubo e per un dato fluido, le quantità H e g costanti, il suddetto innalzamento od abbassamento sarà proporzionale ad $\frac{1}{b}$, cioè in ragione inversa del raggio osculatore della curva in O ovvero O'. Ma essendo, per una data materia del tubo e per un dato fluido, le curve NOM, N'O'M' sempre simili a loro stesse, e molto approssimantisi ad archi semicircolari o almeno archi circolari simili (§. 22 e segg.) i raggi osculatori in O ed O' sono proporzionali alle corde di queste curve, cioè ai diametri interni de' tubi NM, N'M'.

Dunque finalmente *per una data materia di tubi ed un dato fluido, l'ascensione del fluido al disopra, o la depressione al disotto del livello, sarà sempre ne' diversi tubi in ragione inversa del diametro interno di essi.*

Esperimento.

51. Riferiremo quello istituito dai Sigg. *Haüy* e *Tremery* ad istanza del Sig. *De la Place*. Osservarono pertanto questi due celebri Fisici che in un tubo, il di cui diametro interno era di 2 *millimetri*, l'acqua s'innalzava sopra il livello all'altezza di *millimetri* 6.75, e l'olio d'arancio a *millimetri* 3.4.

Prendendo un tubo più stretto di $\frac{4}{3}$ di *millimetro* nel suo diametro interno, l'acqua vi si sollevò sino a 10 *millimetri*, e l'olio d'arancio sino a 5, altezze appena sensibilmente diverse da 10.12, e 5.1, che la ragione inversa de' diametri avrebbe domandato.

Con un tubo anche più angusto di $\frac{3}{4}$ di *millimetro* di diametro, la ragione inversa de' diametri avrebbe dovuto dare per l'acqua 18 *millimetri* di altezza, e per l'olio d'arancio 9.06, e l'osservazione diede 18.5 e 9; nè maggior consenso si può

sperare in siffatti esperimenti, attesa soprattutto la grandissima difficoltà di misurare con esattezza i piccoli diametri interni de' tubi capillari.

I due primi tubi, uno di 2 *millimetri* e l'altro di $\frac{4}{3}$ di *millimetro* di diametro servirono pure a determinare l'abbassamento del mercurio sotto il livello del mercurio adjacente. A quest'oggetto furono primieramente immersi in un bagno di mercurio, ad una profondità che fu esattamente misurata. Quindi facendo scorrere sotto la loro estremità inferiore un piano levigatissimo, che impedisse al mercurio di escire dai tubi, furono questi diligentemente estratti, e si misurarono le altezze delle colonne di mercurio sopra il detto piano. Le differenze tra queste altezze e le lunghezze delle parti immerse de' tubi nel bagno, davano, com'è evidente, gli abbassamenti sotto il livello ricercati. Così questi si trovarono di $3\frac{2}{3}$ di *millimetro*, e di 5.5, i quali numeri sono precisamente in ragione inversa de' diametri interni de' tubi, ai quali appartengono, cioè 2, e $\frac{4}{3}$.

52. Se supporremo che θ sia il complemento dell'angolo sempre costante (§. 21) che in una data materia di tubi e in un dato fluido fanno i lati estremi cioè le tangenti in N, M, ovvero N', M' colle pareti del tubo, essendo T, T' i centri de' circoli osculatori, ossia degli archi circolari NOM, N'O'M', ne' triangoli NST, N'S'T' si avrà $\frac{1}{NT} = \frac{\text{sen. NTS}}{NS}$, ovvero $\frac{1}{N'T'} = \frac{\text{sen. N'T'S'}}{N'S'}$, cioè chiamando l il semidiametro interno del tubo NS ovvero N'S', sarà $\frac{1}{b} = \frac{\text{sen. }\theta}{l}$. Quindi l'ascensione o depressione del fluido nel tubo capillare che abbiamo trovata $= \frac{H}{gb}$ (§. 50) potrà anche esprimersi con $\frac{H \text{ sen. }\theta}{gl}$; d'onde coi tubi di una data materia e con un dato fluido, dovendo esser sempre le medesime le quantità H, g, θ, di nuovo si vede che la suddetta ascensione o depressione dovrà esser sempre in ragione inversa del semidiametro l, o del diametro interno del tubo.

53. Di più esprimendo $\frac{H \text{ sen. }\theta}{gl}$ l'ascensione o depressione del fluido in un tubo capillare del semidiametro l (§. *prec.*),

se per mezzo degli accennati (§. 51) o di altri equivalenti esperimenti si determinerà per un caso particolare il valore del coefficiente costante $\frac{H \text{ sen. } \theta}{g}$, si avrà la detta ascensione o depressione per qualunque altro caso. Così per es. essendosi trovato (§. 51) che in un tubo del diametro di 2 *millimetri*, cioè in cui $l = 1^{mill.}$ il mercurio si abbassava di $3\frac{1}{3}^{mill.}$, se ne dedurrà perciò che per il mercurio rinchiuso in un tubo di vetro si ha $\frac{H \text{ sen. } \theta}{g \times 1^{mill.}} = 3\frac{1}{3}^{mill.}$, ossia $\frac{H \text{sen.} \theta}{g} = 1^{mill.} \times 3\frac{1}{3}^{mill.}$; e quindi generalmente che la depressione del mercurio in un tubo capillare di vetro del semidiametro l, cioè $\frac{H \text{sen.} \theta}{gl} = \frac{1^{mill.} \times 3\frac{1}{3}^{mill.}}{l}$.

54. L'abbassamento del mercurio ne' tubi capillari dimostra la necessità, e suggerisce insieme il modo di correggere le altezze barometriche osservate dall'effetto della capillarità, ad oggetto di renderle comparabili, e ridurle a quelle che risulterebbero dalla sola pressione dell'atmosfera. Quest'effetto della capillarità sarebbe nullo in un barometro a due branche di eguale larghezza, perchè lo stesso ed operante in senso contrario nelle due estremità del mercurio; ma ne' barometri formati di un tubo immerso in un largo pozzetto, l'effetto capillare si fa tanto più sensibile, quanto il tubo è più stretto. Infatti se supporremo esser A l'altezza del mercurio nel tubo sopra il livello del pozzetto, e P l'altezza della colonna mercuriale equivalente alla pressione dell'atmosfera, la pressione sopra di qualunque punto del pozzetto sarà $g\mathrm{P} + \mathrm{K}$, mentre quella contraria del mercurio innalzato nel tubo, e che si suppone spogliato superiormente d'aria, nel vertice della sua superficie convessa, sarà $\mathrm{K} + \frac{H}{b} + g\mathrm{A}$, onde dovrà aversi per l'equilibrio $g\mathrm{P} = \frac{H}{b} + g\mathrm{A}$, ossia $\mathrm{P} = \mathrm{A} + \frac{H}{gb}$; cioè all'altezza A indicata dal barometro dovrà aggiungersi $\frac{H}{gb}$ per ottenere l'altezza P conveniente alla pressione dell'atmosfera. Ma essendo l il semidiametro del tubo, $\frac{H}{gb} = \frac{H \text{sen.} \theta}{gl}$ (§.52) $= \frac{1^{mill.} \times 3\frac{1}{3}^{mill.}}{l}$ (§.*prec.*). Dunque questa stessa sarà l'altezza da aggiungersi ad A, per avere l'altezza P conveniente alla pressione dell'atmosfera.

Così per es. se i diametri di due tubi di barometro sieno di 2 e 3 *millimetri*, le quantità da aggiungersi saranno $3\frac{1}{3}^{mill.}$, e $2\frac{2}{3}^{mill.}$, onde quantunque indichino la medesima altezza A, corrisponderanno ciò non ostante a disuguali pressioni dell'atmosfera.

ARTICOLO II.

Dell' innalzamento od abbassamento di un fluido nell'interstizio capillare compreso tra le pareti interne di un tubo e la superficie di un cilindro concentrico della stessa materia, ovvero nell' intervallo parimenti capillare di due piani della stessa materia, paralleli e verticali.

55. Rappresenti *a'b'm'n'* (*Fig.* 10) la linea a cui s'innalza il fluido lungo le pareti del tubo, e *d'c'p'q'* quella a cui sorge lungo la superficie del cilindro concentrico interiore. Tra queste due linee più elevate si avvallerà il fluido; cosicchè condotta *a'd'* diretta al centro comune del tubo e del cilindro, il fluido da *a'* in *d'* prenderà la figura *aid* di un arco concavo circolare e pressochè semicircolare (§. 22, e segg.). Se dunque per il punto infimo *i* di quest'arco s'intenderà passare un piano orizzontale, la porzione di fluido posta al di sopra di questo piano verrà inferiormente terminata da una corona circolare e superiormente da una superficie concava parimenti circolare e semicilindrica, di cui quella corona circolare sarà tangente; e l'azione di questa porzione di fluido all'insù (§. 43) sarà quella che determinerà l'innalzamento del fluido sottoposto sopra il livello del fluido esteriore (§. 50). Consideriamo una porzione piccolissima di questa massa fluida attraente, per es. *abcdefgh* corrispondente al trapezio *a'b'c'd'*, in cui *a'd'*, *b'c'* eguagliano l'interstizio capillare tra il cilindro ed il tubo, ed *a'b'*, *c'd'* due piccolissime porzioni delle loro circonferenze: siccome tutte le altre consimili porzioni infinitesime del fluido attraente ed attratto sono le medesime in massa, figura e posizione, quello che si dimostrerà di una, varrà anche per il complesso di tutte.

Ora volendo noi determinare l'ascensione del fluido nella porzione infinitesima X dell'interstizio capillare tra il tubo e il cilindro, la paragoneremo con quella che ha luogo in un tubo

ordinario Z, il di cui diametro interno AD sia eguale ad $a'd'$. Il fluido solleverassi lungo le pareti di questo tubo precisamente allo stesso modo in cui si solleva lungo le pareti del tubo e del cilindro concentrico, conformandosi in una curva concava AID eguale e simile ad aid; poichè i piani infinitesimi attraenti rappresentati da AE, DH sono della stessa materia e situati allo stesso modo rispetto al fluido sottoposto ed attratto, rappresentato da EH, che i piani infinitesimi ae, dh rispetto ad $eh = EH$. Qualunque sia pertanto la figura degli archi AID, aid, ed anche quando non fosser circolari e semicircolari, come si è veduto ai §§. 22 e segg., egli è certo però che il raggio osculatore del menisco generato dalla rivoluzione di AID attorno dell'asse del tubo nel punto infimo I sarà lo stesso che il raggio osculatore in i nel piano aid della massa fluida attraente ag. Il raggio osculatore di questa medesima massa attraente in una direzione ik perpendicolare alla prima, sarà evidentemente infinito. Se dunque quel primo raggio osculatore comune alle due masse attraenti si chiami b, nel punto I del tubo capillare Z avremo un'attrazione $= K - \frac{H}{b}$ (§§. 33, 34, e 42, III.°), e nel punto i, o in qualunque altro punto della ik, avremo un'attrazione $= K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\infty}\right)$ (§. 44, II.°) $= K - \frac{H}{2b}$. Supponendo adunque che dai punti I ed i scendano verticalmente i soliti canaletti infinitesimi, che ripiegandosi per di sotto sorgano sino a un qualunque punto della superficie del fluido del vaso in cui l'attrazione è $= K$ (§. 28), e supponendo inoltre che il fluido nel tubo Z s'innalzi sopra il livello del fluido nel vaso all'altezza A, e nell'interstizio X fra il cilindro e il tubo all'altezza a, si avranno al solito (§. 50) le due equazioni dell'equilibrio $K - \frac{H}{b} + gA = K$, $K - \frac{H}{2b} + ga = K$, d'onde ne risulterà $A = \frac{H}{gb}$, ed $a = \frac{H}{2gb}$, e quindi $a = \frac{1}{2}A$.

Sorgerà dunque il fluido nell'interstizio capillare tra il cilindro ed il tubo ad un'altezza sopra il livello del fluido esteriore contenuto nel vaso, eguale alla metà di quell'altezza a cui s'innalza in un tubo capillare del medesimo diametro che la lar-

ghezza di quell' interstizio, ovvero, il ch' è lo stesso (§. 50), *ad un' altezza eguale a quella a cui s' innalza in un tubo capillare di un diametro due volte più grande, cioè di un raggio eguale alla larghezza dell' interstizio stesso.*

56. La dimostrazione procederà allo stesso modo nel caso che la superficie del fluido sia convessa, solo che gli alzamenti si cangeranno in abbassamenti; ed il teorema, com' è evidente, avrà pure egualmente luogo nel caso che i raggi del tubo esterno e del cilindro interno divengano infiniti, nel qual caso si avranno due piani verticali e paralleli posti ad una piccolissima distanza l' uno dall' altro.

ESPERIMENTO.

57. I medesimi Sigg. *Haüy* e *Tremery*, che abbiam citati qui sopra (§. 51), avendo preso ad osservare l' ascensione dell' acqua tra due lastre di vetro verticali e parallele, poste alla distanza l' una dall' altra di 1 *millimetro*, la ritrovarono di 6. 5 *millimetri*, cioè presso a poco eguale a quella osservata nel primo de' tre tubi del §. 51 di 2 millimetri di diametro, la quale fu di millimetri 6. 75.

Avendo verificato il teorema in uno de' due limiti, cioè nel caso che i raggi del tubo e del cilindro fossero infiniti; vollero anche verificarlo nell' altro limite, cioè essendo piccolissimi i raggi del cilindro e del tubo. Presero pertanto un tubo di vetro ben calibrato che avea di diametro interno 5 *millimetri*, e dentro v' inserirono un cilindro parimenti di vetro di un diametro di 3 *millimetri*, usando ogni diligenza perchè l' asse dell' uno coincidesse esattamente con quello dell' altro. Tuffando quindi nell' acqua il tubo ed il cilindro così disposti, osservarono che nell' interstizio capillare, ch' era della larghezza di 1 *millimetro*, l' acqua s' innalzava un poco meno di 7 *millimetri*, cioè presso a poco quanto nel primo de' sovraccitati tre tubi, il di cui semidiametro eguagliava la larghezza dell' interstizio capillare compreso tra il cilindro ed il tubo.

Articolo III.

De' movimenti, e dell'equilibrio di una piccola quantità di fluido rinchiusa dentro di un tubo conico capillare, orizzontale o inclinato all'orizzonte.

58. Una piccola colonna di fluido rinchiusa in un tubo capillare cilindrico, se questo sia situato orizzontalmente, rimarrà in quiete ove si trova, e se si solleverà alcun poco il tubo da una estremità, la gocciola si muoverà certamente verso l'opposta parte. Imperocchè terminando la colonnetta fluida alle due estremità in due superficie concave o convesse, ma eguali e simili tra loro, se si considererà il filo fluido che ne attraversa l'asse, il raggio osculatore nelle due estremità sarà il medesimo, per es. $= b$, epperò queste due estremità verranno spinte in direzioni contrarie con un'egual forza $K \pm \frac{H}{b}$ (§. 39), onde vi sarà equilibrio e la colonnetta si rimarrà in quiete, e solo potrà e dovrà muoversi in virtù del proprio peso, quando il tubo venga da un'estremità alcun poco sollevato.

Ma lo stesso non varrà in un tubo conico, in cui essendo diversi i raggi osculatori ne' punti estremi del filo fluido che passa per l'asse della colonnetta, diverse pure saranno le forze contrarie da cui esso trovasi spinto, onde muoverassi verso l'uno o l'altro estremo; e non potrà ridursi alla quiete se non contrabilanciando questa tendenza colla forza contraria della sua gravità, cioè sollevando debitamente l'asse del tubo al di sopra dell'orizzonte da quella parte a cui tende la colonnetta. Dobbiamo dunque ora cercare le condizioni dell'equilibrio e le leggi de' movimenti di una siffatta colonnetta fluida rinchiusa in un tubo conico capillare.

59. Supponghiamo nella figura che le due superficie in cui termina la colonnetta fluida sieno entrambe concave; ma applicheremo facilmente di mano in mano anche al caso che sieno convesse i discorsi che andrem facendo, e i risultati che andrem ritrovando. Sia pertanto ABCD (*Fig.* 11) il tubo conico tronco capillare, il di cui asse E*e* per ora supponesi orizzontale; MM'N'N sia la piccola porzione di fluido dentro di esso rinchiusa, e gli archi circolari simili M*p*N, M'*p*'N' (§. 22)

rappresentino le superficie concave in cui essa termina da ambe le parti. La lunghezza pp' di questa piccola porzione di fluido facciasi $= 2\alpha$; la distanza del punto di mezzo q dal vertice O del cono $= a$; il piccolissimo angolo MOp chiamisi π; sia inoltre θ il complemento dell'angolo sempre il medesimo (§. 21) con una data materia di tubi ed un dato fluido, che i lati estremi delle curve MN, M'N', ossia le tangenti ML, M'L' fanno colle pareti del tubo; e finalmente sieno b, b' i raggi Mc, M'c' degli archi circolari simili MpN, M'p'N'.

Nel triangolo pertanto OMc si avrà sen. OMc cioè sen.θ al seno o tangente del piccolissimo angolo M O$c = \pi$, come Oc : Mc $= Oq - pq - cp$: M$c = a - \alpha - b$: b, onde anche sen.θ + tang.π : tang.$\pi = a - \alpha$: b, e quindi $b = \frac{(a-\alpha)\,\text{tang.}\,\pi}{\text{sen.}\,\theta + \text{tang.}\,\pi}$.

Similmente nel triangolo OM'c' sarà sen. OM'c' = sen.c'M'D = sen.θ : sen. M'Oc' ossia tang.$\pi = Oq + qp' + p'c'$: M'$c' = a + \alpha + b'$: b', onde anche sen.θ — tang.π : tang.$\pi = a + \alpha$: b', e $b' = \frac{(a+\alpha)\,\text{tang.}\,\pi}{\text{sen.}\,\theta - \text{tang.}\,\pi}$.

Sarà dunque $\frac{H}{b} = \frac{H\,(\text{sen.}\,\theta + \text{tang.}\,\pi)}{(a-\alpha)\,\text{tang.}\,\pi} = \left(H.\frac{\text{sen.}\,\theta}{\text{tang.}\,\pi} + H\right).\frac{1}{a-\alpha}$,

cioè convertendo la frazione $\frac{1}{a-\alpha}$ in serie, e tosto moltiplicando

$$\frac{H}{b} = H.\frac{\text{sen.}\,\theta}{\text{tang.}\,\pi}.\left(\frac{1}{a} + \frac{\alpha}{a^2} + \frac{\alpha^2}{a^3} + \frac{\alpha^3}{a^4}\,\text{ec.}\right) + \frac{H}{a} + \frac{H\alpha}{a^2} + \frac{H\alpha^2}{a^3} + \text{ec.}$$

E allo stesso modo $\frac{H}{b'} = \frac{H\,(\text{sen.}\,\theta - \text{tang.}\,\pi)}{(a+\alpha)\,\text{tang.}\,\pi} = \left(H.\frac{\text{sen.}\,\theta}{\text{tang.}\,\pi} - H\right) \times \frac{1}{a+\alpha}$, cioè riducendo la frazione $\frac{1}{a+\alpha}$ in serie

$$\frac{H}{b'} = H.\frac{\text{sen.}\,\theta}{\text{tang.}\,\pi}.\left(\frac{1}{a} - \frac{\alpha}{a^2} + \frac{\alpha^2}{a^3} - \frac{\alpha^3}{a^4} + \text{ec.}\right) - \frac{H}{a} + \frac{H\alpha}{a^2} - \frac{H\alpha^2}{a^3} + \text{ec.}$$

Ma $K - \frac{H}{b}$ è la forza (§§. 33, 34, e 42, III.°) con cui il sottilissimo filo fluido pp' è attratto da p verso p', e $K - \frac{H}{b'}$ è la forza contraria (§§. citt.) con cui il medesimo filo fluido è attratto e spinto da p' verso p. Essendo dunque $b < b'$, epperò $\frac{H}{b} > \frac{H}{b'}$, e $K - \frac{H}{b} < K - \frac{H}{b'}$, il filo fluido pp' situato in una posizione orizzontale, e quindi tutta la gocciola verrà necessariamente

sariamente spinta verso il vertice O del cono da una forza eguale all'eccesso della seconda forza sopra la prima, cioè da una forza $\frac{H}{b}-\frac{H}{b'}$, ossia (mettendo i valori trovati di $\frac{H}{b}$ ed $\frac{H}{b'}$ e riducendo) da una forza $=\frac{H\,sen.\theta}{tang.\pi}\cdot\left(\frac{2\alpha}{a^2}+\frac{2\alpha^3}{a^4}+ec.\right)+\frac{2H}{a}+\frac{2H\alpha^2}{a^3}+ec.$ ossia (perchè α supponesi molto piccola rispetto ad a, e in conseguenza $\frac{a^3}{a^3}$ molto più piccola rispetto ad $\frac{\alpha}{a}$, ed $\frac{a^3}{a^4}$ rispetto ad $\frac{\alpha}{a^2}$ siccome anche più piccola risulterà $\frac{a^2}{a^2}$ in confronto di 1 epperò $\frac{a^2}{a^3}$ in confronto di $\frac{1}{a}$) trascurando que' termini che possono per la loro piccolezza trascurarsi, la forza con cui il sottilissimo filo fluido pp' è spinto verso il vertice O del cono, verrà prossimamente espressa da $\frac{H\,sen.\theta}{tang.\pi}\cdot\frac{2\alpha}{a^2}+\frac{2H}{a}$.

Se le superficie MpN, M'p'N' saranno convesse, come lo sono col mercurio, le due forze contrarie che spingeranno pp' da $pinp'$ e da p' in p saranno (§§. 38 e 42, V.°) $K+\frac{H}{b}$, $K+\frac{H}{b'}$, delle quali, per essere $\frac{H}{b}>\frac{H}{b'}$, la prima sarà maggiore della seconda, onde il filo fluido pp' e tutta la gocciola si allontanerà dal vertice O del cono con una forza $=\frac{H}{b}-\frac{H}{b'}$. Ora in quest'ipotesi si troverà, seguendo le medesime tracce di prima, $b=\frac{(a-\alpha)\,tang.\pi}{sen.\theta-tang.\pi}$, $b'=\frac{(a+\alpha)\,tang.\pi}{sen.\theta+tang.\pi}$, e quindi

$$\frac{H}{b}=\left(H.\frac{sen.\theta}{tang.\pi}-H\right).\frac{1}{a-\alpha}=H.\frac{sen.\theta}{tang.\pi}.\left(\frac{1}{a}+\frac{\alpha}{a^2}+\frac{\alpha^2}{a^3}+\frac{\alpha^3}{a^4}+ec.\right)-\frac{H}{a}-\frac{H\alpha}{a^2}-\frac{H\alpha^2}{a^3}-ec.$$

$$\frac{H}{b'}=\left(H.\frac{sen.\theta}{tang.\pi}+H\right).\frac{1}{a+\alpha}=H.\frac{sen.\theta}{tang.\pi}.\left(\frac{1}{a}-\frac{\alpha}{a^2}+\frac{\alpha^2}{a^3}-\frac{\alpha^3}{a^4}+ec.\right)+\frac{H}{a}-\frac{H\alpha}{a^2}+\frac{H\alpha^2}{a^3}-ec.$$

onde la forza $\frac{H}{b}-\frac{H}{b'}$ con cui la goccia fugge verso la base del cono si ridurrà col medesimo discorso di prima ad $\frac{H\,sen.\theta}{tang.\pi}.\frac{2\alpha}{a^2}-\frac{2H}{a}$.

Per contrabilanciare questa forza $\frac{H\,sen.\theta}{tang.\pi}\cdot\frac{2\alpha}{a}\mp\frac{2H}{a}$, con cui la gocciola tende verso il vertice o verso la base del cono, bi-

sognerà sollevare nel primo caso al di sopra, abbassare nel secondo l'asse eE, al di sotto dell'orizzonte di un piccolo angolo V, onde il filo fluido pp' acquisti una forza eguale e contraria a quella che abbiamo trovata, e si rimanga in quiete nel sito ove si trova. Chiamando al solito g la gravità, ed essendo 1 la base del filo fluido pp', questa forza con cui è spinto pp' a scendere per un piano, inclinato all'orizzonte di un angolo V, è eguale a $g \cdot 1 \cdot pp' \cdot \text{sen. V} = 2ag \text{ sen. V}$. Perchè dunque la gocciola rimanga in equilibrio, dovrà essere questa forza eguale all'altra quì sopra trovata, cioè dovrà aversi l'equazione

$$2g\alpha \text{ sen. V} = \frac{\text{H sen.}\theta}{\text{tang.}\pi} \cdot \frac{2a}{a} \pm \frac{2\text{H}}{a}.$$

Figuriamoci ora un tubo capillare cilindrico il di cui semidiametro sia eguale a qr semidiametro del tubo conico in q, cioè $= Oq \cdot \text{tang. } qOr = a \text{ tang.}\pi$. Essendo l l'altezza a cui s'innalzerà sopra, o si abbasserà sotto il livello l il fluido in questo tubo, abbiam trovato (§. 52) $l = \frac{\text{H sen.}\theta}{ga \text{ tang.}\pi}$, donde $\frac{\text{H sen.}\theta}{\text{tang.}\pi} = gal$, ed $\text{H} = \frac{ga l \text{ tang.}\pi}{\text{sen.}\theta}$; e questi valori di $\frac{\text{H sen.}\theta}{\text{tang.}\pi}$ ed H sostituiti nell'ultima equazione dopo le ovvie riduzioni daranno

$$\text{sen. V} = \frac{l}{a} \pm \frac{l \text{ tang.}\pi}{a \text{ sen.}\theta}.$$

Ora il secondo termine $\frac{l \text{ tang.}\pi}{a \text{ sen.}\theta}$, che si può mettere sotto la forma $\frac{l}{a} \cdot \frac{a \text{ tang.}\pi}{a \text{ sen.}\theta}$ sarà sempre molto piccolo in confronto del primo $\frac{l}{a}$ se $\frac{a \text{ tang.}\pi}{a \text{ sen.}\theta}$ sarà una piccola frazione, cioè se $a \text{ tang.}\pi$ ossia la mezza grossezza della goccia qr sarà molto minore di $a \text{ sen.}\theta$ ossia di a (per esser prossimamente semicircolari gli archi $\text{M}p\text{N}$, $\text{M}'p'\text{N}'$ epperò sen. θ prossimamente $= 1$) cioè della mezza lunghezza della goccia stessa. In questo caso adunque si avrà prossimamente

$$\text{sen. V} = \frac{l}{a}.$$

Ma l'ascensione o depressione del fluido nel tubo capillare del semidiametro $a \text{ tang.}\pi$ è in ragione inversa di questo semidiametro (§. 50), ossia, per essere π costante, in ragione

inversa di a; ed essendo V molto piccolo si può prendere V in luogo di sen. V.

Dunque *l'angolo di elevazione o depressione* V *dell'asse del tubo conico sopra o sotto dell'orizzonte, che farà che la gocciola si rimanga in quiete e in equilibrio, sarà presso a poco reciprocamente proporzionale al quadrato della distanza del mezzo della goccia del vertice del cono.*

Articolo IV.

De' movimenti e dell'equilibrio di una goccia di fluido compresa tra due piani, i quali combaciandosi in uno dei loro lati che supporremo orizzontale formano un piccolissimo angolo tra loro.

60. I fenomeni che presenta una goccia rinchiusa tra due piani inclinati l'uno all'altro di un piccolo angolo, sono molto analoghi a quei che si osservano in una goccia posta dentro di un tubo capillare conico, e che abbiamo esposti nell'*Articolo precedente*. Ora noi dunque ci proponghiamo di dedurre quest'analogia di fenomeni dai nostri premessi principj, e di convalidarla cogli esperimenti.

61. Sia pertanto AA' (*Fig.* 12) l'intersezione de' due piani che supponghiamo orizzontale; BCB' il piano verticale ad essa perpendicolare che passa pel centro della goccia D; e l'angolo BCB' metà dell'angolo BCB'' che fanno i due piani che comprendon la goccia, sia $= \pi$. Sia inoltre DGIH il mezzo profilo della metà superiore della goccia, che col lato GH toccherà sensibilmente uno de' due piani tra' quali è compresa, essendo HI un arco circolare del raggio b, e che fa col piano CB un angolo dato (§. 21) il di cui complemento facciasi $= \theta$. Sia inoltre $CD = a$, $DE = x$, la normale $EF = h$, e la $DG = h_1$; sarà $h = CE \text{ tang. } \pi = (a - x) \text{ tang. } \pi$; $h_1 = CD \times \text{tang. } \pi = a \text{ tang. } \pi$, epperò $\frac{1}{h} = \frac{1}{a \text{ tang. } \pi} + \frac{x}{a^2 \text{ tang. } \pi}$ + ec. ed $\frac{1}{h_1} = \frac{1}{a \text{ tang. } \pi}$.

Ora se la goccia si supponga tagliata per FE, DG con piani perpendicolari al piano BCB', e perciò paralleli ad AA', le distanze di tutti i punti delle sezioni che ne nasceranno dal-

piano che passa per AA', CB', e che chiameremo *piano intermedio*, saranno eguali, com'è evidente, ad FE, DG, cioè ad h ed h_1. Sarà dunque facile di determinare per approssimazione i raggi osculatori nel senso verticale ne' punti estremi di quelle sezioni; dappoichè supponendo che FE', GD' rappresentino le curvature delle mezze gole della goccia in questi punti, ed FF', GG' i rispettivi raggi osculatori, siccome gli angoli F', G' sono eguali ai complementi di E'FB, D'GB, epperò eguali a θ, si avrà perciò $\frac{1}{FF'} = \frac{\text{sen. }\theta}{FE}$, $\frac{1}{GG'} = \frac{\text{sen. }\theta}{GD}$, cioè chiamando b, b_1 i raggi osculatori FF', GG', sarà $\frac{1}{b} = \frac{\text{sen. }\theta}{h}$, $\frac{1}{b_1} = \frac{\text{sen. }\theta}{h_1}$.

S'intenda ora la metà della mezza goccia, che da noi si considera, tagliata con un piano perpendicolare a BCB'' che passi per ID: si avrà nella superficie della goccia una sezione rappresentata dal quarto di circolo IE''D'', il di cui raggio è ID, che faremo $= b'$, e che deve intendersi eretto normalmente al piano BCB'' sopra di ID. Immaginandoselo così eretto, s'intenda il solito canaletto fluido che internandosi nella goccia si porti comunque in una direzione perpendicolare alla superficie, da E'' in D''. I raggi de' due circoli osculatori che si tagliano ad angolo retto in E'' saranno, nel senso orizzontale b', e nel senso verticale b, mentre in D'' saranno b' e b_1; onde (§§. 44, II.°, e 46) l'azione della gocciola in D'' per ispinger l'acqua dentro il detto canaletto sarà $K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b'}\right)$, e quella in E'' sarà $K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right)$.

Ma alla seconda, per l'equilibrio (§. 27) bisognerà aggiungere la pressione nascente dalla gravità, e proporzionale all'elevazione di E'' sopra di D''. Condotta l'orizzontale DL, sarà l'angolo EDL l'angolo che chiameremo V fatto dal *piano intermedio* CB' coll'orizzonte; e l'elevazione di E'' sopra di D'', eguale a quella di E sopra di D, cioè eguale ad EL, sarà $= ED \text{ . sen. } V = x \text{ sen. } V$. Moltiplicando pertanto per la gravità g si avrà gx sen. V da aggiungersi all'azione ch'esercita la gocciola in E'' per eguagliarla, siccome richiede l'equilibrio del canaletto, all'azione esercitata in D''.

Si avrà dunque l'equazione

$$K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right) + gx \text{ sen. } V = K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b_{,}} - \frac{1}{b'}\right)$$

ossia $$gx \text{ sen. } V = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b_{,}}\right)$$

ossia, sostituendo in vece di $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{b_{,}}$ i loro valori dianzi trovati $\frac{\text{sen. }\theta}{h}$, $\frac{\text{sen. }\theta}{h_{,}}$, e quindi in vece di $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h_{,}}$ i loro valori parimenti esposti qui sopra $\frac{1}{a \text{ tang. }\pi} + \frac{x}{a^2 \text{ tang. }\pi}$, $\frac{1}{a \text{ tang. }\pi}$, e riducendo

$$gx \text{ sen. } V = \frac{Hx \text{ sen. }\theta}{2a^2 \text{ tang. }\pi}$$

cioè $$\text{sen. } V = \frac{H \text{ sen. }\theta}{2a^2 g \text{ tang. }\pi}.$$

Quindi essendo una quantità costante $\frac{H \text{ sen. }\theta}{2g \text{ tang. }\pi}$, *sarà* sen. V, *epperò anche il piccolo angolo* V *inclinazione del* piano intermedio *all'orizzonte, proporzionale ad* $\frac{1}{a^2}$, *cioè in ragione inversa del quadrato della distanza del centro della goccia dall'intersezione de' due piani*, come abbiam trovato (§. 59) accadere in una goccia sospesa in equilibrio in un tubo conico capillare, il di cui asse sia sollevato sopra l'orizzonte di un piccolo angolo V.

62. E se l'angolo formato dai due piani che abbiamo chiamato 2π si supporrà eguale a quello che fa l'asse del cono coi lati che chiamammo allora π (§. 59), cioè se nella formola allora trovata si metterà 2π in vece di π, e tang. 2π ossia 2 tang. π in vece di tang. π, quella formola per la goccia equilibrata nel cono diverrà

$$gx \text{ sen. } V = \frac{H \text{ sen. }\theta}{2 \text{ tang. }\pi} \cdot \frac{a}{a^2} + \frac{H}{a}$$

ossia $$\text{sen. } V = \frac{H \text{ sen. }\theta}{2a^2 g \text{ tang. }\pi} + \frac{H}{gaa}$$

nella qual formola potrassi dimostrare, come allora, sostituendo que' medesimi valori di $\frac{H \text{ sen. }\theta}{2 \text{ tang. }\pi}$ ed H, che il secondo termine divien trascurabile in confronto del primo, ond'essa diverrà

$$\text{sen. V} = \frac{\text{H sen.}\,\theta}{2a^2 g\,\text{tang.}\,\pi}$$

come appunto si è trovato nel presente caso della goccia sospesa tra due piani (§. prec.).

Se dunque l' angolo formato da due piani sia eguale a quello che fa l' asse del cono coi lati, perchè la goccia rimanga sospesa alla medesima distanza dall' intersezione de' due piani, e dal vertice del cono, l' inclinazione del piano intermedio *all' orizzonte nel primo caso dovrà esser la medesima che l' elevazione nel secondo caso dell' asse del cono sopra l' orizzonte.*

63. Si potrà anch' esprimere sen. V in termini tutti calcolabili e dati, introducendo nel valore trovato di sen. V l'altezza a cui si solleverebbe il fluido nell' interstizio di due piani paralleli posti ad una data distanza, per es. quella in cui sono i due piani l'uno all'altro inclinati che rinchiudon la goccia, ad una distanza b dalla loro intersezione. Siccome questi due piani comprendono un angolo 2π, alla distanza b dalla loro intersezione saranno lontani di b tang. 2π ossia $2b$ tang. π. Ora il fluido tra due piani paralleli posti a questa distanza si solleverebbe ad un' altezza eguale a quella in cui salirebbe in un tubo capillare di un semidiametro $= 2b$ tang. π (§§. 55, e 56), cioè ad un' altezza $\frac{\text{H sen.}\,\theta}{2gb\,\text{tang.}\,\pi}$ (§. 52). Si avrà dunque quest' altezza che chiameremo $h = \frac{\text{H sen.}\,\theta}{2gb\,\text{tang.}\,\pi}$, d'onde $hb = \frac{\text{H sen.}\,\theta}{2g\,\text{tang.}\,\pi}$, e quindi sen. $\text{V} = \frac{\text{H sen.}\,\theta}{2a^2 g\,\text{tang.}\,\pi} = \frac{hb}{a^2} = \frac{h}{b} \cdot \frac{b^2}{a^2}$.

ESPERIMENTO.

64. È celebre a questo proposito l' esperimento colla massima diligenza istituito da *Hauksbée*, che viene riferito da *Newton* nella *Quest.* 31 della sua *Ottica*, e che il Sig. *De la Place* meritamente presceglie per paragonarne i risultati con quei della teoria ora stabilita. Ne daremo anche noi un breve cenno, limitandoci a farne il paragone coll' ultima formola sen. $\text{V} = \frac{h}{b} \cdot \frac{b^2}{a^2}$.

Prese pertanto *Hauksbée* due ben levigate lastre di vetro, lunghe 20 pollici inglesi, larghe 4, le quali toccandosi in una

delle loro estremità ne rimanevan dall'altra lontane di $\frac{1}{16}$ di pollice, cosicchè venivano a formare tra loro un angolo di 10'44", che rappresenta il nostro 2π. Avendole poscia bagnate internamente con un pannolino intriso d'olio d'arancio, ed essendo orizzontale una delle due lastre, lasciò cadere sopra di questa verso l'estremità più lontana dall'angolo, una o due gocce di quell'olio, e calandovi sopra l'altra lastra, sinchè toccasse la goccia, e facesse coll'inferiore il suddetto angolo di 10'44", osservò correr la goccia rapidamente e con moto accelerato verso l'angolo e l'intersezione de' piani. Per fermarla ad una maggiore o minor distanza da quest'intersezione, conveniva sollevar più o meno i lati de' due piani che si toccavano al di sopra dell'orizzonte. Così osservò egli per es. che acciò la goccia si fermasse ad una distanza di 6 pollici dall'angolo, bisognava alzare la lastra inferiore sopra dell'orizzonte di un angolo di 2°45'. Ora, siccome essendo orizzontale la lastra inferiore, il *piano intermedio* alle due lastre si sollevava dalla parte opposta della metà dell'angolo 10'44" de' due piani, cioè di 5'22", perciò egli è evidente che sollevandosi la lastra inferiore di 2°45', il *piano intermedio* non si solleverà che di 2°45' — 5'22", cioè di 2°39'38", e questo sarà l'angolo V dato dall'osservazione.

Vediamo ora qual sia il valor di quest'angolo che ci somministra la formola sen. $V = \frac{h}{l} \cdot \frac{b^2}{a^2}$ (§. prec.). Supponghiamo la quantità arbitraria b di 10 pollici inglesi, cioè la metà della lunghezza delle lastre: siccome queste nelle loro estremità eran distanti di $\frac{1}{16}$ di pollice, lo saranno di $\frac{1}{32}$ alla distanza b. Sarà dunque h (§. prec.) l'altezza a cui sorgerebbe l'olio d'arancio tra due lastre verticali e parallele poste alla distanza di $\frac{1}{32}$ di pollice l'una dall'altra.

Per determinarla premettiamo che 1 pollice inglese è di 25.3918 *millimetri*, epperò $\frac{1}{32}$ di pollice eguale a *millimetri* $\frac{25.3918}{32}$; e ricordiamoci inoltre che tra due lastre verticali e parallele distanti tra loro 1 *millimetro*, il nostro fluido, cioè l'olio d'arancio, dee sollevarsi a quell'altezza a cui salirebbe in un tubo del diametro di 2 *millimetri* (§§. 55, e 56), la quale si è trovata coll'esperienza di circa *millimetri* 3.4 (§. 51). Essendo dunque le altezze in ragione inversa delle distanze

de' piani (§§. 50, 55, 56) si dovrà dire $\frac{25.3918}{32} : 1 = 3.4$ ad un quarto che sarà $\frac{32 \times 3.4}{25.3918}$, ed esprimerà in *millimetri* l'altezza h a cui sorgerebbe l'olio d'arancio tra due lastre verticali e parallele poste a quella distanza che hanno i due piani alla distanza b dalla loro intersezione. Dividendo questo valore di h per 25.3918 valore del pollice inglese in *millimetri*, ne risulterà il valore di h in pollici inglesi $= \frac{32 \times 3.4}{(25.3918)^2}$. Mettendo dunque questo valore di h nella formola sen. $V = \frac{h}{b} \cdot \frac{b^2}{a^2}$, e facendovi $b = 10$, ed a distanza del centro della goccia dall'intersezione de' piani $= 6$, si avrà finalmente

sen. $V = \frac{32 \times 3.4}{10.(25.3918)^2} \cdot \frac{100}{36} = \frac{1088}{23210.706} = 0.046874$, che prossimamente corrispondono a 2°41′, che appena sensibilmente differiscono da 2°39′38″ valore di V dato dall'osservazione.

ARTICOLO V.

Della forza con cui tendono ad avvicinarsi e riunirsi due piani verticali e paralleli tuffati in un fluido, allorchè si trovano in piccola distanza l'uno dall'altro.

65. I principj della premessa teorìa somministrano anche la spiegazione e la misura di un singolare fenomeno che ci presentano due piani paralleli verticalmente tuffati in un fluido colle loro estremità inferiori, i quali, sia che il fluido tra essi s'innalzi, oppure si abbassi, se siano posti in una gran vicinanza tra loro, manifestano una forte e sensibile tendenza a riunirsi l'uno coll'altro. Così per es. due vasellini di vetro, di forma parallelepipeda, galleggianti sull'acqua o sul mercurio, frettolosamente corrono l'uno verso l'altro, allorchè si trovano in grandissima vicinanza. Noi dunque per mezzo della premessa teorìa dell'azion capillare, ci troviamo in grado di fissar l'origine di questa singolar tendenza ed attrazione manifestataci dall'esperienza, e di determinarne la misura e le leggi.

66. Rappresentino le MB, NR (*Fig.* 13) le sezioni de' due piani,

piani, fra' quali supporremo che il fluido si sollevi sino all'altezza OP sopra il livello VV' del fluido circostante. Considerando un qualunque punto R di uno di questi due piani, posto sotto del detto livello, per aver la pressione che il fluido esterno vi esercita, si concepisca un canaletto VSR col ramo VS verticale, ed il ramo SR orizzontale. E primieramente il fluido contenuto in VS agirà sopra di R con una pressione eguale al suo peso, cioè chiamando g la gravità, ed 1 la base del canaletto, con una forza $= g \cdot VS$. Si trasmetterà inoltre dal medesimo canaletto VS al punto R la pressione che l'atmosfera esercita in V, la quale chiameremo P, e la forza attraente con cui il fluido VS agisce sopra di sè stesso, che al solito chiameremo K; onde la pressione totale trasmessa da VS in R sarà $P + K + g \cdot VS$. Ma il fluido contenuto nel canaletto RS esercita sopra di R una forza K da R verso S contraria alla prima (§. 28). Sarà dunque la forza con cui il fluido esteriore preme il punto R del piano $= P + K + g \cdot VS - K = P + g \cdot VS$.

Per paragonare con questa pressione esterna l'interna corrispondente, si concepisca il canaletto OQR col ramo OQ verticale, e il ramo QR orizzontale. Il canaletto OQ agirà sopra di R primieramente col suo peso $g \cdot OQ$, e trasmetterà poi al medesimo punto R la pressione dell'atmosfera P, ed inoltre quella forza attraente con cui il fluido OQ agisce sopra di sè stesso da O verso Q, la quale, facendosi $= b$ il raggio osculatore della curva NOM in O, ed essendo $= \infty$ l'altro raggio osculatore della sezione normale alla prima e parallela ai piani, sarà perciò $= K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\infty}\right) = K - \frac{H}{2b}$ (§§. 44, e segg.). La forza trasmessa dal fluido OQ in R sarà dunque $= P + K - \frac{H}{2b} + g \cdot OQ$. Ma l'altezza OP alla quale s'innalza il fluido tra i due piani sopra il livello del vaso è la metà di quella a cui s'innalzerebbe in un tubo capillare di un diametro eguale all'interstizio de' piani, e che avesse in conseguenza il medesimo raggio osculatore b nel punto infimo della superficie concava da cui superiormente è terminato (§§. 55, e 56); onde siccome quest' altezza nel tubo sarebbe $\frac{H}{gb}$ (§. 50), l'altezza OP tra i due piani dovrà essere $\frac{H}{2gb}$, d'onde risulta $\frac{H}{2b} = g \cdot OP$. Dunque sosti-

tuendo questo valore, la suddetta forza trasmessa in R dal canaletto OQ sarà $P+K-g.OP+g.OQ=P+K+g.PQ$; d'onde, come si fece per RS, sottraendo K per la forza contraria con cui il fluido RQ attrae sè stesso da R verso Q rimarrà la pressione interna del canaletto OQ sopra di $R=P+g.PQ=P+g.VS$, cioè eguale alla pressione esterna sul medesimo punto. Tutti dunque i punti de' piani posti al disotto del livello VV' del fluido circoscritto, sono egualmente premuti da fuori in dentro che da dentro in fuori, epperò per questo capo non potranno tendere nè ad avvicinarsi, nè a discostarsi.

Oltrepassato questo livello, il fluido in virtù dell'azione del piano combinata colla propria s'innalza verso Z, formando la curva VZ'Z, siccome internamente s'innalza sino in N formando la curva ON'N. Sia Z' un punto di questa curva, e per esso s'intenda condotto il canaletto orizzontale $Z'q$. Se Z'T sia normale alla curva, e b' il suo raggio osculatore in Z', si dimostrerà, come per il punto O, che $P+K-\frac{H}{2b'}$ sarà la forza che preme Z' da Z' verso T; e questa forza verrà trasmessa al punto q del piano in una direzione normale al medesimo piano. Quivi però verrà diminuita dalla forza contraria K con cui il fluido del canaletto qZ' agisce da q verso Z'. Rimarrà dunque la pressione esterna in $q=P-\frac{H}{2b'}$. Ora è facile il vedere che $\frac{H}{2b'}=g.qG$; dappoichè nel canaletto VTZ' dev'esser per l'equilibrio la pressione in V cioè $P+K$ eguale alla pressione in Z', cioè a $P+K-\frac{H}{2b'}$, aggiunto il peso relativo del fluido contenuto nel canaletto obbliquo Z'T e sostenuto sopra il livello di V, cioè $g.qG$. Si avrà dunque $P+K=P+K-\frac{H}{2b'}+g.qG$, cioè $\frac{H}{2b'}=g.qG$, e quindi tutta la pressione esterna in $q=P-g.qG$.

Si dimostrerà poi, come per il punto R, che la pressione interna in q proveniente dal canaletto Oq' è $=P+K-g.OP+g.Oq'=P+K-g.Pq'$, la quale diminuita al solito di K, pressione in senso contrario del canaletto qq', ci farà trovare la pressione interna in $q=P-g.Pq'$, cioè eguale alla pressione esterna pocanzi determinata $P-g.qG$. Dunque anche da G

in Z, come al di sotto del livello VV', le pressioni esterne ed interne si pareggiano, e niuna forza in conseguenza ne può nascere per accostare o discostare i piani.

Ma al di sopra di Z, per es. in R', la pressione esterna si ridurrà a quella dell'atmosfera P, mentre l'interna si dimostrerà, come si è fatto per q, che sarà sempre $P - g \cdot PQ'$, onde quella prevarrà sopra questa della quantità $g \cdot PQ'$, cioè il punto R' del piano sarà spinto da fuori in dentro con una forza $g \cdot PQ'$, cioè dal peso di un filo fluido compreso tra il medesimo punto, e il livello del fluido circostante VV'. Lo stesso accadrà di tutti gli altri punti compresi tra Z ed L.

Oltrepassato il punto L, sia p' un punto della piccola altezza NL del menisco NOM, la cui pressione esterna sarà sempre $= P$. Per averne l'interna, s'intenda il canaletto orizzontale $p'N'$, ed essendo b'' il raggio osculatore della curva NOM in N', la pressione in N' in una direzione N'L' perpendicolare alla curva sarà, come si è veduto per il punto O, $= P + K - \frac{H}{2b''}$; e questa trasmessa in p' verrà al solito diminuita di K, e si ridurrà a $P - \frac{H}{2b''}$. Ora considerando il canaletto N'L'O, dovrà, per l'equilibrio, la pressione in O, cioè $P + K - \frac{H}{2b}$, essere eguale alla pressione in N' ora trovata $P + K - \frac{H}{2b''}$, aggiunto il peso relativo del canaletto N'L' sostenuto sopra il livello di O, cioè $g \cdot p'L$. Ne risulterà evidentemente da quest'eguaglianza

$$\frac{H}{2b''} = \frac{H}{2b} + g \cdot p'L$$

ossia perchè, come si è veduto qui sopra, $\frac{H}{2b} = g \cdot OP$,

$$\frac{H}{2b''} = g \cdot OP + g \cdot p'L = g \cdot p'G.$$

Quindi essendosi trovata superiormente la pressione interna di $p' = P - \frac{H}{2b''}$ essa si ridurrà a $P - g \cdot p'G$; onde l'esterna, ch'è P, prevarrà sopra di questa della quantità $g \cdot p'G$, vale a dire che anche tutti i punti del piano compresi tra L ed N, egualmente che i compresi tra Z ed L, sono spinti da fuori in dentro da forze equivalenti ai pesi di altrettanti fili

fluidi di un'altezza eguale alla distanza di que' punti dal livello del fluido circostante VV'.

Tutti i punti adunque de' due piani compresi tra Z *ed* N, *ove sorge il fluido esternamente ed internamente, sono spinti da fuori in dentro con forze eguali ai pesi di altrettanti fili fluidi compresi tra que' punti e il livello* VV'; *ond'essi tenderanno ad accostarsi con una forza eguale alla somma di queste forze.*

Lo stesso, ed anche più facilmente potrà dimostrarsi nel caso che il fluido si abbassi tra i due piani, prendendo la figura convessa NOM (*Fig.* 14). Infatti andando sulle medesime tracce della ora esposta dimostrazione, tutti i punti posti al di sotto di N, per es. R, saranno egualmente premuti di dentro e di fuori; poichè la pressione esterna sarà, come prima, $P+g.VS$, e quella di dentro sarà ora $P+K+\frac{H}{2b}+g.OQ-K$ (§. 44, e segg.), cioè (per essere come prima $\frac{H}{2b}=g.OP$) $=P+g.PQ$, cioè eguale all'esterna $P+g.VS$. Nel tratto ZG sono pure evidentemente eguali le pressioni interna ed esterna, poichè si riducono entrambe a quella dell'atmosfera P. Finalmente nell'intervallo NZ, per es. in R', la pressione interna sarà evidentemente $=P$, mentre l'esterna, come in R, sarà $=P+g.VS'$, cioè supererà l'interna di $g.VS'$.

Anche in questo caso dunque dell' abbassamento del fluido tra i due piani, come in quello dell' innalzamento, i due piani in tutti i punti tra Z *ed* N, *ove si abbassa esternamente ed internamente il fluido, sono spinti da fuori in dentro da forze equivalenti ai pesi di altrettanti fili fluidi compresi tra que' punti, e il livello superiore* VV' *del fluido; onde nell' un caso, come nell' altro, hanno essi una tendenza a riavvicinarsi.*

67. L'espressioni delle forze prementi i diversi punti de' piani da fuori in dentro, che abbiamo ora trovate, non involvono la pressione P dell'atmosfera, e sarebbero le stesse, quando anche si supponesse $P=0$. Il fenomeno adunque della tendenza a riunirsi che mostrano i piani tuffati in un fluido, allorchè si pongono in grandissima vicinanza tra loro, avrà luogo egualmente nel vuoto che nel pieno, e si effettuerà colla medesima forza.

68. Dietro le tracce della dimostrazione addotta niente vi sarà poi di più facile che calcolare la forza totale, con cui ten-

dono a riunirsi i due piani. Si consideri un qualunque punto R' (*Figg.* 13, *e* 14) posto tra N e Z, e sia GR' = x, R'r = δx. Se la larghezza data de' piani tuffati nel fluido si chiami a, la forza con cui l'elemento R'r è spinto da fuori in dentro, per ciò che si è dimostrato, sarà = $agx\delta x$; onde la somma di queste forze sino in R' sarà $\int agx\delta x = \frac{1}{2} ag.r^2 + C$. Ora questa somma dovendo svanire in Z, quando GR' = x diviene GZ, sarà perciò $C = -\frac{1}{2} ag.\overline{GZ}^2$. Quindi la cercata somma delle forze sino in R' sarà $\frac{1}{2} ag.(\overline{GR}^2 - \overline{GZ}^2)$, e tutta l'intiera somma delle forze da Z sino in N, ossia la forza totale con cui uno de' due piani è spinto verso l'altro, sarà finalmente $\frac{1}{2} ag \times (\overline{GN}^2 - \overline{GZ}^2) = \frac{1}{2} ag.(GN+GZ).(GN-GZ) = \frac{1}{2} ag.(GN+GZ).NZ$. Ora essendo g la gravità specifica del fluido, quest'espressione rappresenta la metà di un parallelepipedo fluido, la di cui base è a.NZ, cioè la porzione del piano bagnata al di dentro o al di fuori soltanto da N sino in Z, e l'altezza è GN + GZ, cioè la somma degli innalzamenti od abbassamenti sopra il livello VV' de' punti di contatto dell'interna ed esterna superficie del fluido col piano. Il peso adunque di questo parallelepipedo fluido rappresenta la forza con cui uno de' due piani tende ad unirsi coll'altro postogli in somma vicinanza.

69. La base a.NZ dell'anzidetto parallelepipedo cresce in ragione di NZ, cioè sensibilmente in ragione dell'innalzamento od abbassamento OP del fluido al di sopra o al di sotto del livello VV'; e l'altezza similmente GN + GZ = NZ + 2GZ, se si trascuri la quantità 2GZ molto piccola in confronto di NZ, cresce pure prossimamente nella stessa ragione di NZ ossia di OP. Il peso adunque del medesimo parallelepipedo esprimente la forza di tendenza reciproca de' due piani, cresce sensibilmente in ragion del quadrato di OP. Ma l'innalzamento od abbassamento è in ragione inversa della distanza de' due piani (§§. 50, 55, e 56).

Dunque *la forza con cui tendono ad unirsi due piani paralleli verticalmente tuffati in un fluido, e posti in somma vicinanza l'uno dell'altro, varia in ragion duplicata inversa della distanza tra loro* (*).

(*) Il Sig. *De la Place*, sopprimendone al solito la dimostrazione, dice che questa tendenza de' piani si troverà essere in ragione inversa della loro reciproca distanza: ma il discorso egualmente semplice che irrefragabile che ci ha

ARTICOLO VI.

Di alcuni altri fenomeni capillari, che anche più ocularmente dimostrano l'esposta teorìa.

70. Oltre ai fenomeni capillari, che al lume della teorìa e dell'esperienza abbiamo esaminati e trovati sì mirabilmente tra loro consenzienti ne' precedenti *Articoli*, altri molti ancora se ne sono osservati e descritti accuratamente dai Fisici, i quali quasi intuitivamente e senza quasi alcun bisogno di discorso geometrico dimostrano la necessità e verità dell'esposta teorìa, mettendo soprattutto come sott'occhio quell'attrazione ch'esercitano le superficie concave o convesse, in cui termina una massa fluida capillare, la quale attrazione è appunto, come si è veduto, dell'esposta teorìa la prima base e il principal fondamento. Non perchè la nostra teorìa dell'azion capillare abbia bisogno di nuova conferma, ma solo per abbondanza, e per renderne sempre più sensibile la verità, descriveremo alcuni di questi *fenomeni*, soggiungendovi le loro facili ed ovvie spiegazioni.

FENOMENO.

71. *S'immerga nell'acqua a una piccola profondità un tubo capillare, e chiudendone col dito l'estremità inferiore si estragga poscia dall'acqua: rimovendone il dito, il fluido si abbasserà alcun poco nel tubo, e n'escirà in forma di goccia; ma quando avrà finito di discendere, si troverà sempre che l'altezza della colonna residua sospesa nel tubo è notabilmente maggiore di quell'altezza, a cui sorgeva l'acqua nel tubo tuffato in questo fluido, sopra il livello del fluido circostante.*

---

fatto trovare in vece la ragione inversa duplicata, sembra che ci autorizzi ad attribuire l'asserzione del Sig. *De la Place* o ad una svista, o ad uno sbaglio di stampa. Frattanto potrà sembrare a taluno assai singolare e degno di riflessione, che questa ragione duplicata inversa, secondo cui si accresce la tendenza reciproca de' piani posti ad una piccola ma sensibil distanza, mentre è così consentanea alle leggi dell'universale attrazione de' corpi celesti, elettrici, magnetici ec. posti in distanze sensibili, non suppone poi d'altronde che debba esser la stessa, e neppure che debba esser nota e data la legge dell'attrazione nelle minime impercettibili distanze, benchè da questa seconda tragga la prima la sua origine ed esistenza.

Spiegazione.

72. La ragione del fenomeno si è, che nel tubo tuffato nell'acqua, non vi ha che la concavità della superficie superiore del fluido rinchiuso nel tubo che contribuisca a sollevar l'acqua, laddove estratto che sia dall'acqua, concorre con quella forza l'altra della superficie convessa della goccia che formasi all'estremità inferiore. Sia MON (*Fig.* 15) la superficie concava superiore del fluido, allorchè il tubo è tuffato nell'acqua, e il raggio osculatore in O sia $= b$: abbiam veduto (§. 50) che l'altezza a cui s'innalzerà il fluido sopra il livello del vaso, sarà $= \frac{H}{gb}$. Estraendolo dall'acqua, e supponendo che rimanga la stessa la superficie concava MON, sia b' il raggio osculatore della curva convessa in cui terminerà la goccia inferiore M'O'N' in O'. Immaginando il solito canaletto OO', sarà questo spinto all'in giù dal suo proprio peso $g \cdot OO'$, e dall'azione $K - \frac{H}{b}$ ch'esercita il fluido sopra di sè stesso da O verso O' (§§. 34, e 42, III.°); mentre al contrario sarà spinto all'insù dall'azione $K + \frac{H}{b'}$ che il fluido esercita in O' da O' verso O (§§. 38, e 42, IV.°). Si avrà dunque nell'equilibrio (§. 27) $g \cdot OO' + K - \frac{H}{b} = K + \frac{H}{b'}$, e quindi $OO' = \frac{H}{gb} + \frac{H}{gb'}$ cioè maggiore di $\frac{H}{gb}$, altezza a cui sorgerebbe nel tubo tuffato nel vaso. Se fosse $b = b'$ quell'altezza sarebbe doppia di questa.

Fenomeno.

73. *Immergendo nell'acqua un sifone ricurvo capillare* ABC (Fig. 16) *a braccia disuguali, sicchè il braccio più corto* AB *rimanga tutto sott'acqua, questa s'innalzerà sopra il livello nel braccio più lungo* BC *sino ad un'altezza* FG. *Estraendo quindi il sifone dall'acqua, si formerà nell'estremità* A *una goccia* ANO. *Ora aspettando che il fluido divenga stazionario nel tubo, si osserverà che conducendo per la sommità della goccia l'orizzontale* NI', *l'altezza* I'C *dell'acqua nel braccio più lungo sarà*

maggiore di FG. *Si tolga col dito la goccia formatasi in* A; *quest' altezza andrà a mano a mano scemando, e quando la superficie dell' acqua in quel punto diverrà piana ed orizzontale, quell' altezza si farà eguale ad* FG. *Rimettendo per lo contrario nuove goccie d' acqua in* A, *sicchè la superficie torni ad esser ivi convessa, a misura che crescerà questa convessità, si accrescerà altresì di mano in mano l' altezza dell' acqua nel braccio* BC, *e diverrà proporzionatamente maggiore di* FG.

SPIEGAZIONE.

74. Il fenomeno è in sostanza lo stesso che il precedente, epperò l'istessa ancora ne dovrà essere la spiegazione. In fatti anche qui, allorchè il sifone è tuffato nel vaso, l'innalzamento del fluido nel braccio più lungo BC dipende unicamente dall'attrazione del menisco concavo in cui termina superiormente la massa fluida innalzatasi; laddove, estratto il sifone dall'acqua, e formatasi una goccia più o meno convessa in A, alla primiera forza si aggiugne quella di questa superficie convessa, che agisce nel medesimo senso.

FENOMENO.

75. *Sia* ABC (Fig. 17) *un sifone capillare, ed una colonna di mercurio in equilibrio ne riempia la parte inferiore* ABC, *cosicchè* AC *sia orizzontale. Inclinando il tubo da una parte, per es. dalla parte di* A, *il mercurio salirà sino in* A' *nel braccio* AB, *e scenderà sino in* C' *nel braccio* BC. *Se in questo stato si rialzerà lentamente il tubo per ricondurlo alla sua primiera situazione, giunto che ci sia si osserverà che la sua altezza nel braccio* AB *si manterrà per qualche tempo un po maggiore che nel braccio* BC.

SPIEGAZIONE.

76. La ragione del fenomeno nasce da ciò che nel rialzare lentamente il tubo per ricondurlo alla sua prima posizione, la superficie del fluido nel braccio AB diviene meno convessa, e per lo contrario nel braccio BC più convessa di quel che fosse nella prima posizione, in cui era egualmente convessa

vessa da ambe le parti. Questa differenza di convessità nelle due superficie dipende dall'attrito cui soggiace il mercurio, nello scorrere lungo le pareti del tubo. Rialzando il tubo, le parti contigue alla sua superficie, che si ritirano da A' verso A, sono trattenute da quest'attrito, mentre le parti più lontane che si muovono lungo l'asse del tubo, poco risentono quell' impedimento. Quindi dovrà divenir meno convessa la superficie, ed un poco appianarsi. Egli è poi evidente che questo medesimo attrito dovrà produrre un effetto contrario sulla superficie del mercurio che sale nell'altro braccio BC, trattenendone le parti che scorrono lungo la superficie del tubo, e lasciando più libero il movimento di quelle che salgono lungo l'asse.

Quando dunque il tubo, lentamente rialzandolo, torna alla sua primiera posizione, in cui AC era orizzontale, il raggio osculatore nel vertice della convessità del braccio AB sarà maggiore del raggio osculatore nel vertice della convessità del braccio BC; onde chiamando quello b, e questo b', sarà $K + \frac{H}{b}$, cioè la forza che agisce nel vertice della prima convessità (§§. 38, e 42, IV.°) minore di $K + \frac{H}{b'}$ cioè della forza che agisce nel vertice della seconda; e per restituire il necessario equilibrio tra queste forze (§. 27), converrà che il mercurio si sollevi alquanto di più nel braccio AB che nel braccio BC, onde compensare così col proprio peso la differenza di quelle due forze.

Fenomeno.

77. *Se s'immerga nell' acqua un sifone qualunque capillare* ABC (Fig. 18), *le di cui braccia disuguali in lunghezza sieno comunque di eguale o d' ineguale diametro, e che quindi si estragga dall' acqua, si osserverà che questa non escirà, come negli ordinarj sifoni, dal braccio più lungo* BC, *a meno che la differenza delle lunghezze delle due braccia non sia maggiore dell' altezza* FG, *a cui si solleverebbe il fluido in un tubo dello stesso diametro del braccio più corto* AB.

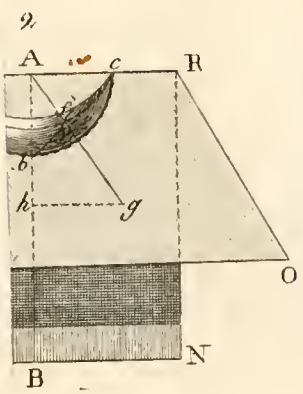
SPIEGAZIONE.

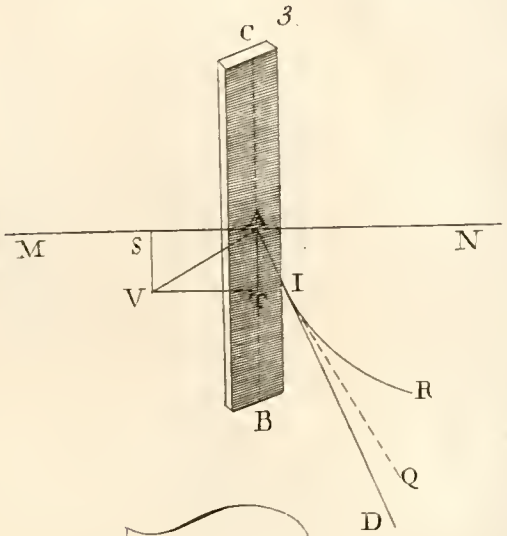
78. Il fluido sgorgando dall'estremità C, terminerà in A in una superficie concava del raggio b, ed in C in una superficie convessa del raggio b', o al più in una superficie piana, nel qual caso b' diverrà infinito. L'altezza FG a cui si alzerebbe il fluido in un tubo dello stesso diametro che il braccio AB, ed essendo b il raggio della concavità della superficie del fluido, sarebbe $\frac{H}{gb}$ (§. 50), d'onde si avrà $\frac{H}{b} = g \,.\, FG$. Supponghiamo che a ed a' sieno le altezze del punto superiore B sopra l'estremità del sifone A e C.

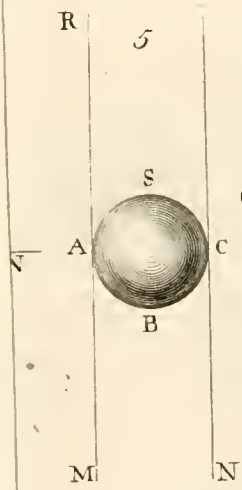
Immaginando il solito canaletto lungo l'asse del sifone, l'estremità di questo canaletto in A sarà spinta all'insù verso B dalla pressione dell'atmosfera che chiameremo P, e dall'attrazione ch'esercita il fluido sopra di sè stesso nella medesima direzione, la quale è $= K - \frac{H}{b}$ (§§. 34, e 42, III.°) $= K - g \,.\, FG$, essendosi poc'anzi dimostrato che $\frac{H}{b} = g \,.\, FG$. Sarà poi spinta in senso contrario dal peso del canaletto BA, la di cui altezza è a, cioè da una forza $g \,.\, a$. Tutta dunque la forza che spinge il canaletto AB da A verso B, e che tende in conseguenza a fare sgorgare il fluido dall'estremità C, sarà $= P + K - g \,.\, FG - g \,.\, a$.

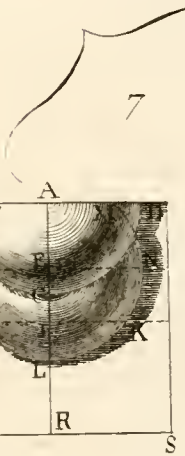
Si oppone a questo sgorgo per l'estremità C la pressione P dell'atmosfera, che rispinge il fluido da C in B, e l'attrazione del fluido sopra di sè stesso nella medesima direzione ed $= K + \frac{H}{b'}$ (§§. 38, e 42, IV.°), onde tutta la forza che rispinge il canaletto CB da C verso B sarà $P + K + \frac{H}{b'}$. Ma questa forza verrà scemata dal peso del canaletto BC, la di cui altezza è a', cioè da una forza $g \,.\, a'$. Tutta dunque la forza che si oppone allo sgorgo per l'estremità C sarà $= P + K + \frac{H}{b'} - g \,.\, a'$.

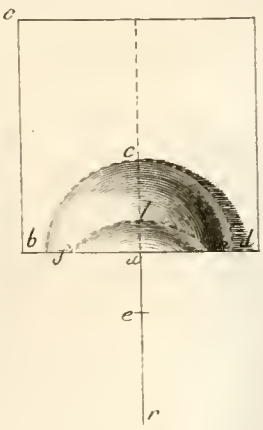
Perchè dunque succeda l'efflusso per l'estremità C, egli è evidente che la prima di queste due forze dovrà esser mag-


2
A
c
R
b
h
g
O
B
N


3
C
M
S
A
N
V
I
R
B
Q
D


5
R
S
A
C
N
B
M
N


7
O
A
B
F
G
H
L
R
S


c
b
d
e
r

6.
A
C

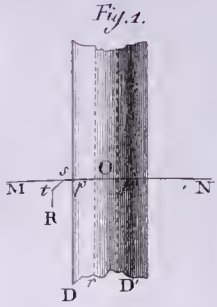
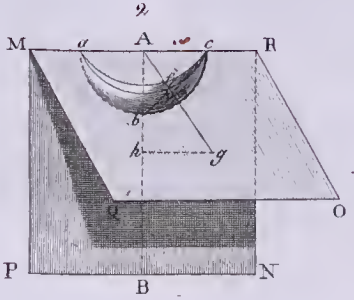
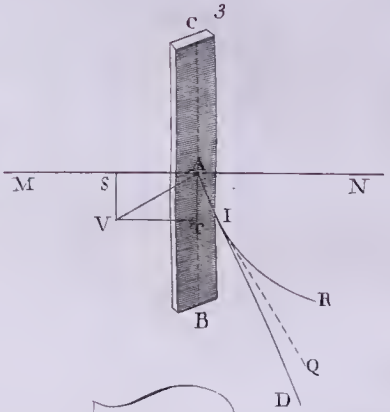
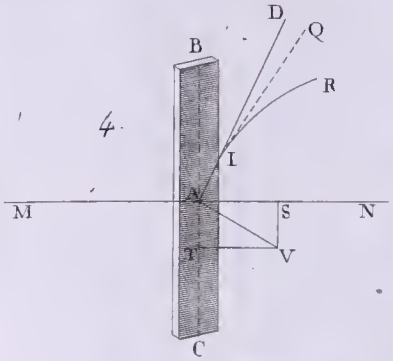


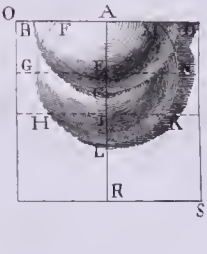
Fig. 1.
M
N
O
R
D
D'

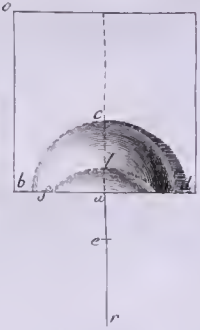

2
M
A
B
P
N
O
Q
g

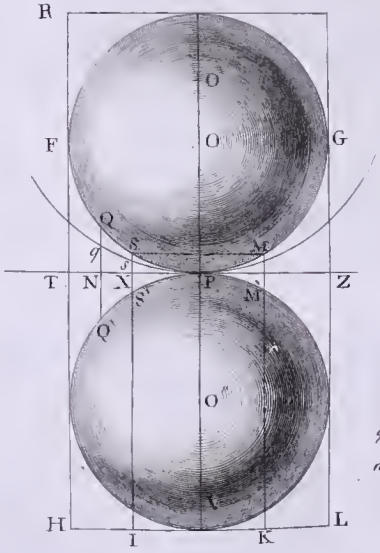

3
C
A
M
N
V
I
R
Q
D
B

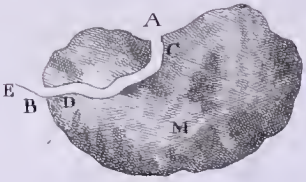

4
D
Q
R
B
I
M
S
N
T
V
C

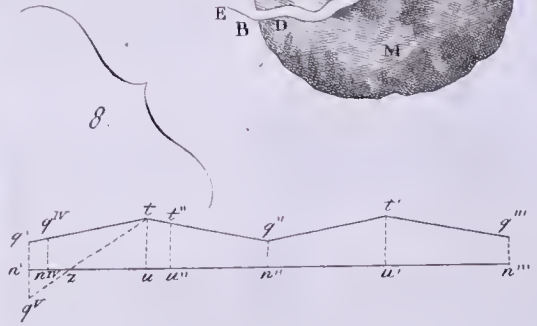
5
R
S
A
C
B
M
N

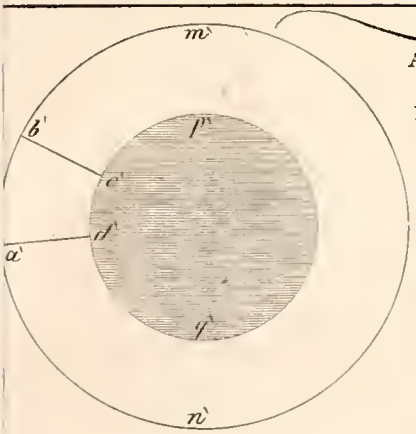

O
A
B
F
G
H
K
L
R
S

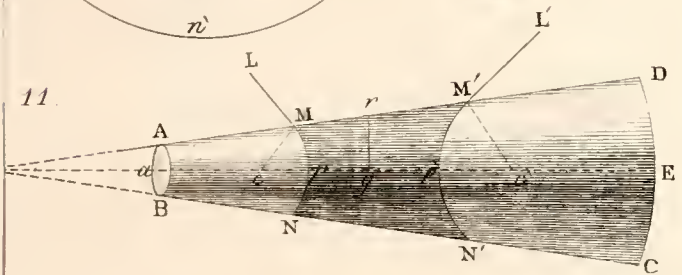

o
c
b
a
e
r

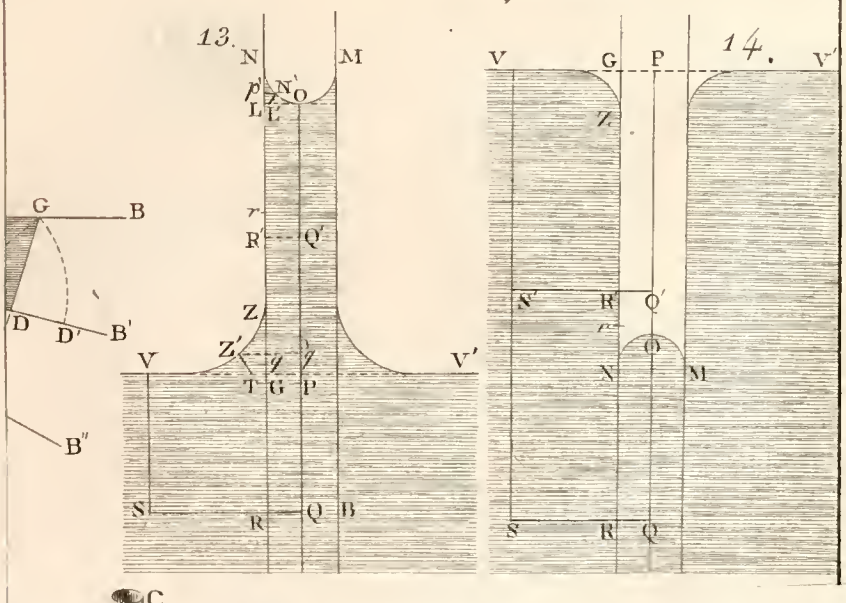

R
O'
F
O
G
Q
S
M
T
N
X
P
Z
Q'
O''
H
I
K
L


6.
A
C
E
B
D
M


8.
q'
q''
t
t''
q''
t'
q'''
n'
n''
z
u
u''
n''
u'
n'''
q''


m'
b'
c'
d'
a'
n'
A
D
E
H
Z
10.
b
c
a
k
d
g
e
h
X


11.
L'
L
M
M'
D
A
E
B
N
N'
C


13.
N
M
G
B
D
D'
B'
B''
V
V'
Z
Z'
T
G
P
S
R
Q
C
14.
V
G
P
V'
S'
R'
Q'
N
M

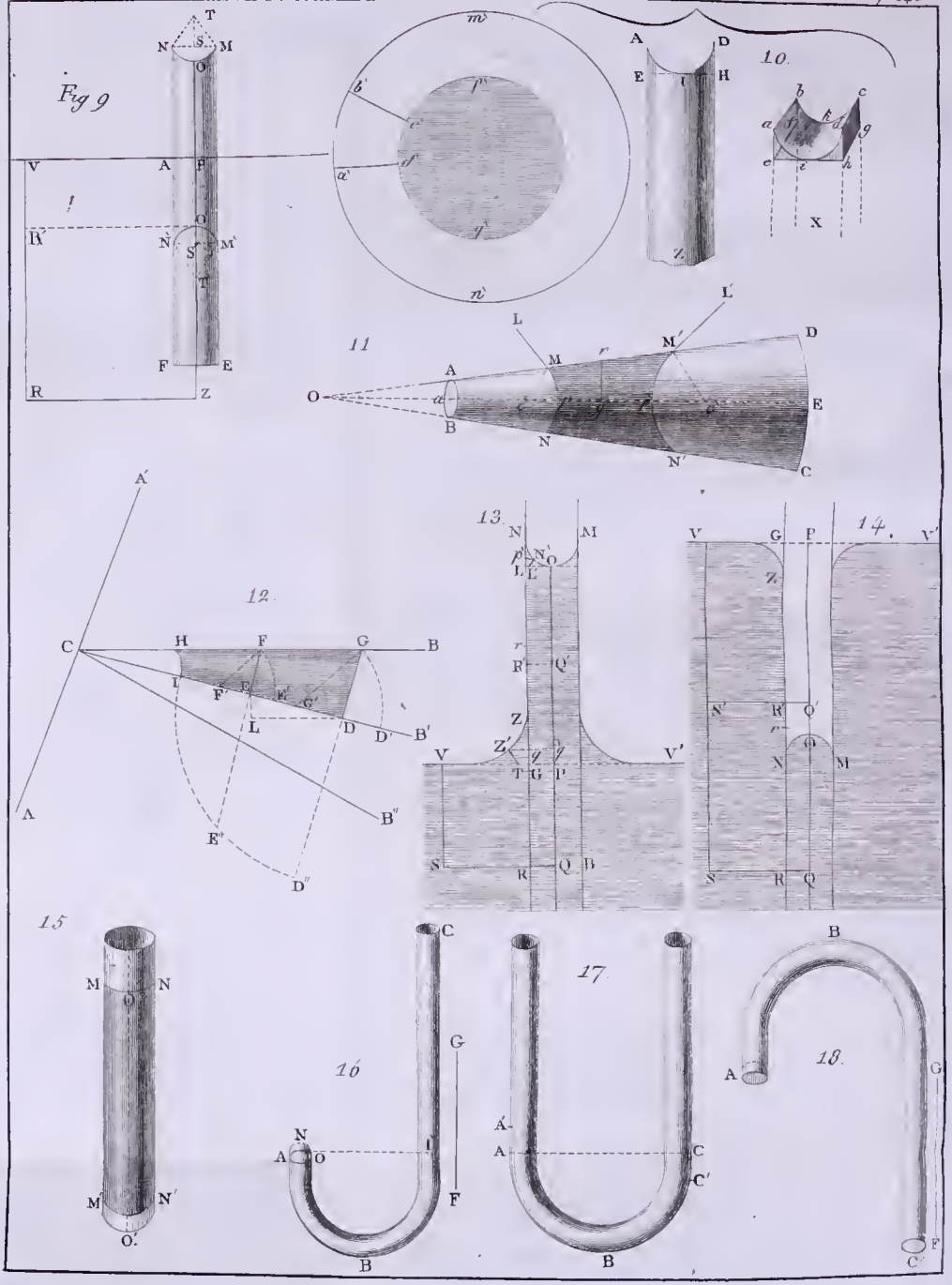


Fig 9
10.
11
12.
13.
14.
15
16
17
18.
X

giore della seconda, cioè $P + K - g \cdot FG - g \cdot a > P + K + \frac{H}{b'} - g \cdot a'$, e quindi $a' - a > FG + \frac{H}{g b'}$; e solamente nel caso che b' sia infinito, cioè che la superficie dell'acqua che tende a sgorgare per C sia piana, basterà che sia $a' - a > FG$. In questo caso adunque, perchè l'acqua scorra dal braccio più lungo BC, basterà che $a' - a$, cioè la differenza della lunghezza delle due braccia BC, BA sia maggiore di FG, cioè di quell'altezza a cui si sosterrebbe sopra il livello il fluido in un tubo capillare dello stesso diametro del braccio più corto AB. Ma se, come l'osservazione c'insegna, la superficie della goccia d'acqua che si affaccia in C abbia una qualche convessità, potrà mancare l'efflusso anche quando la differenza delle lunghezze delle due braccia del sifone sia maggiore di FG.

SAGGI

INTORNO ALLA TEORIA DEL MOTO CONCRETO DE' CORPI.

Del Sig. Paolo Delanges.

Ricevuti li 23 *Maggio* 1808.

Del 1783 pubblicai in Verona la mia *Meccanica Pratica*, in cui, dopo aver esposte le leggi che scopersi seguire l'attrito de' solidi colle sperienze che avea instituite il 1780, passo all' applicazione di esse per determinare l'equilibrio, che può chiamarsi *meccanico* o *concreto*, nelle macchine, per distinguerlo dall'equilibrio *matematico*, in cui si fa astrazione non solo dell' attrito, ma anche della resistenza del mezzo. In seguito diedi nel Tomo III an. 1786 degli Atti nostri una Memoria *sopra il movimento concreto de' solidi* nella quale con i più semplici sperimenti, che a mio giudizio possono immaginarsi per così delicata indagine, determinai l'influenza dello stesso attrito, o per meglio dire, le alterazioni ch' esso introduce nelle astratte leggi del moto. Finalmente nell'anno 1788 ripigliai di bel nuovo così importante soggetto in una mia Memoria inserita nel Tomo VI dell'Opera denominata *Biblioteca fisica d'Europa* che sortiva in Pavia. Conclusi pertanto da siffatti miei studj, avendo confrontati e discussi i risultamenti delle mie sperienze con quelle instituite da parecchj illustri Autori sì antichi che moderni, come può vedersi singolarmente nell' ultima citata mia Memoria, che nell' equilibrio *concreto* delle macchine ordinarie

I. L'attrito segue la ragione della pressione, sia la superficie che frega diretta al moto progressivo, o al rotatorio intorno ad un centro o ad un asse immobile.

II. Che essendo un corpo disposto a moversi sulla superficie d'un altro di moto progressivo e rotatorio insieme, l'attrito nel suo equilibrio *concreto* segue la ragione composta di quella della pressione, e dell'inversa del diametro o del raggio di rotazione.

III. Che l'intensità di tale resistenza dipende dal grado di forbitezza delle superficie in contatto, dall'essere rese artifi-

zialmente più sdruccievoli, e dalla varia loro combinazione nelle superficie de' solidi di sostanza diversa.

IV. E che riguardo a' solidi in movimento, pure nelle ordinarie macchine, l'attrito per l'equilibrio *concreto*, in amendue le distinte circostanze, agisce contro il corpo in movimento in via di costante forza ritardatrice, che non viene perturbata da nessuna funzione della velocità che si trova avere in ogni punto del suo corso.

Premessi questi canoni quanto alla resistenza d'attrito, di cui l'intensità è di gran lunga maggiore di quella provegnente dall'aria, riserbandomi nullameno di dare in fine di questa Memoria qualche esempio col tener conto d'ambedue le resistenze insieme, m'accingo ora ad investigare alcune formole generali, che alla teoria *concreta* de' solidi in moto convengono.

PROBLEMA I.

Sia il solido parallelepipedo A (*Fig.ª* 1.) spinto da B verso C sul piano BC, di cui i punti sono tutti egualmente distanti dal centro de' gravi, colla velocità dovuta ad una data altezza; determinare le formole che comprendono le leggi del suo moto *concreto* pel piano BC dipendentemente della resistenza d'attrito.

È manifesto che ogni punto della massa del corpo si move egualmente che il suo centro di gravità A; in guisa che passato dal sito B al sito B', ogni altro punto della massa avrà percorso uno spazio eguale all'AA', nello stesso tempo collo stesso movimento. Sia pertanto spinto il solido A sul piano BC colla velocità debita all'altezza DA', che si chiami c, ed f sia la gravità terrestre, ed $1 : r$ la ragione della pressione, che in questo caso è il peso assoluto del corpo, alla resistenza d'attrito. Egli è evidente, per i surriferiti canoni, che in virtù di questa sola resistenza d'attrito, procederebbe il corpo sul piano BC di moto uniformemente ritardato, in cui fr sarebbe la forza ritardatrice, supposta la sua massa $= 1$; quindi per le leggi Galileane del moto uniformemente accelerato o ritardato, starà lo spazio verticale AD, a cui risalendo colla velocità c comincierebbe a ricadere, allo spazio che percorre sul piano orizzontale BC, fino a che si riduce in istato

di quiete, nella ragione di fr ad f, cioè in ragione inversa delle forze ritardatrici: di maniera che se fosse l'attrito la quinta parte della pressione, sarà lo spazio che potrà percorrere il corpo A sul piano BC quintuplo dell'altezza AD. I noti principj poi della scienza del moto astratto de' corpi, fanno conoscere, che il rapporto tra il tempo e la velocità in questo movimento, denominata u in qualsivoglia punto B' dello spazio che percorre, verrà rappresentato dalla formula

$$fr \cdot \partial t = -\partial u$$

cioè dalla formula (I.) . . . . $fr \cdot t = -u + c$

poichè quando $t = 0$ deve essere la velocità u uguale all'iniziale c. Chiamando poscia x qualsivoglia spazio BB', si avrà nella formola (II.)

$$\text{(II.)} \ldots . fr \cdot x = -\frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{2}$$

la relazione tra lo spazio e la velocità, e nella formula (III.)

$$\text{(III.)} \ldots . \tfrac{1}{2} fr \cdot t^2 = x$$

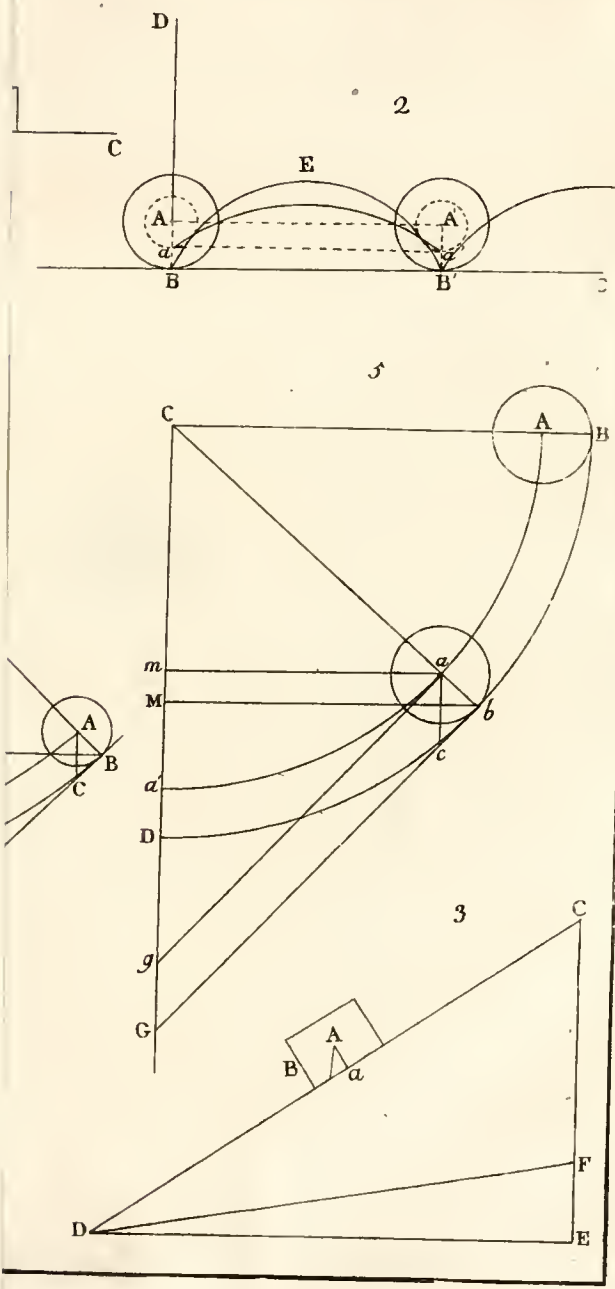
si avrà la relazione tra il tempo e lo spazio. Il che ec.

SCOLIO.

Nella formula (I.) si supponga la velocità $u = 0$, e la velocità iniziale c quella che compete all'altezza percorsa dalla gravità in 1", cioè di piedi parigini 15,1; sicchè come è f, sarà anche $c = 30{,}2$; e si scopre che il corpo si riduce alla quiete sul piano orizzontale BC alla fine del tempo di 5", avendo la pressione all'attrito la ragione di 5 : 1. Così nelle stesse supposizioni la formula (II.) fa conoscere che perviene al detto stato di quiete percorso sul piano lo spazio di piedi 75,5 quintuplo dell'altezza della velocità iniziale. E per ultimo dalla formula (III.) risulta pure, nelle stesse ipotesi, che compie un tale spazio nel tempo di 5": risultamenti che all'assunto caso convengono.

PROBLEMA II.

Spinto un cilindro, di cui la sezione perpendicolare all'asse è il cerchio A (*Fig.ª* 2.) sul piano orizzontale BC colla velocità dovuta all'altezza DA: si cercano le formole che determinano il suo movimento *concreto*.


D
C
2
E
A
A
a
a'
B
B'
3
C
A
B
m
M
a
b
c
a'
D
g
G
A
B
a
C
F
D
E

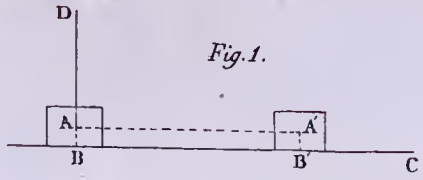
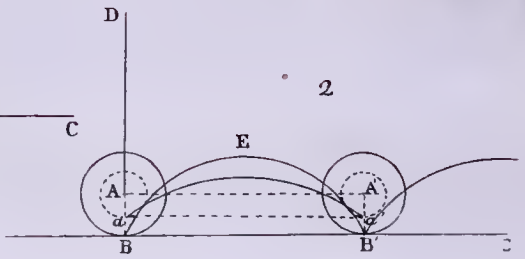
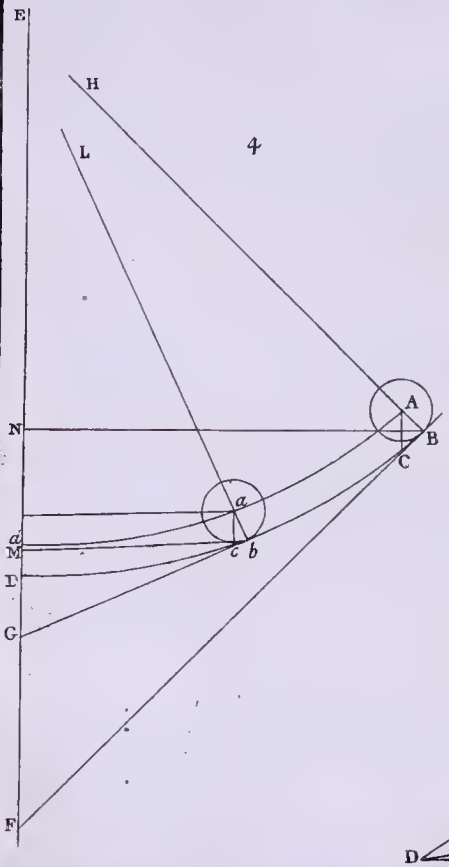


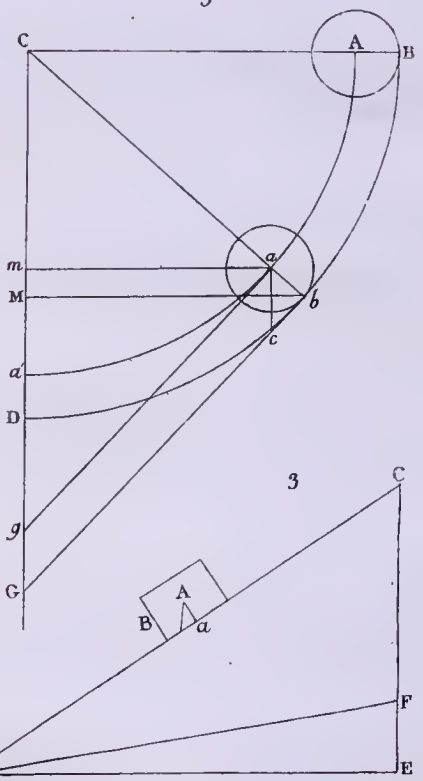
Fig. 1.



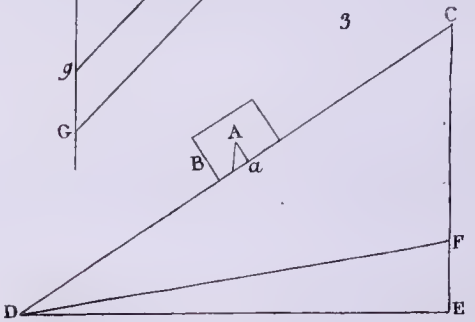
2



4



5



3

Supporremo che il cilindro si mova di moto rotatorio perfetto, vale a dire, che mentre il centro A percorre lo spazio AA', uguale alla circonferenza della sua sezione A, il punto B in essa descriva la cicloide BEB'.

È facile a concepirsi, che in tale movimento ogni punto *a* della massa del corpo, trasferitosi esso da B in B', per un arco cicloidale percorre lo spazio rettilineo *aa'* uguale all'AA' che descrive il centro A; e che la velocità del moto rotatorio va diminuendosi dai punti della circonferenza al centro, in cui si annienta, ma che la velocità progressiva è massima nel centro, come quello che passa da A in A' per la linea più breve nello stesso tempo. Oltre poi le resistenze d'attrito, e dell'aria, che converrebbero aversi in considerazione nell' indagare le leggi del moto *concreto* del cilindro pel piano BC, bisognerebbe computare anche la modificazione causata al suo movimento dalle successive ripercussioni che esercita contro il piano stesso, non permettendo l'arte di costruirlo a tal perfezione sì che in un sol punto lo toccasse.

Lasciando da parte però siffatto ritardo, e quello dell'aria, attenendosi alla sola resistenza d'attrito, sia $1 : r$ la ragione della pressione alla resistenza dello sfregamento, nel caso che *a* è il diametro di rotazione, e sia poi A il diametro della sezione A del cilindro; di modo che posta la sua massa $= 1$, verrà rappresentata la resistenza d'attrito che agisce contro esso, correndo lungo il piano BC in via di costante forza ritardatrice, dalla quantità $\frac{a}{A} . rf$; e perciò avremo come nel problema antecedente nella formula (IV.) la relazione tra il tempo e la velocità del cilindro che si move sul piano orizzontale BC spinto in B colla velocità iniziale *c*

$$(\text{IV.}) \ldots\ldots \frac{a}{A} . rf . t = -u + c .$$

La formula (V.) darà la relazione tra lo spazio e la velocità

$$(\text{V.}) \ldots\ldots \frac{a}{A} . rf . x = -\frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{2} .$$

E la formula (VI.) quella tra il tempo e lo spazio

$$(\text{VI.}) \ldots\ldots \frac{1}{2} . \frac{a}{A} . rf . t^2 = x .$$

Il che ec.

SCOLIO.

Se la resistenza d'attrito fosse $\frac{1}{50}$ della pressione, ossia del peso d'un cilindro del diametro $a = 1$, simile ad A di cui fosse il diametro $= 10$, essendo la costante forza ritardatrice del cilindro A pel piano BC $= \frac{a}{A} . rf$, ed f quella della sua gravità, l'altezza competente alla sua velocità iniziale, allo spazio AA', che dee scorrere sul piano BC per passare allo stato di quiete, avrà la ragione di 1 : 500; e se l'altezza AD è quella di 1", lo spazio AA' verrà trascorso in 500". Dalle formule poi (IV.) (V.) (VI.) si ottengono que' risultati che sonosi dedotti dalle (I.) (II.) (III.), come vedesi nello Scolio (Prob. I.).

PROBLEMA III.

Determinare le leggi del moto *concreto* del solido parallelepipedo A (*Fig.*ª 3.) discendente pel piano inclinato CD, cominciando dal punto C.

Non v'ha dubbio che il movimento del centro di gravità A del solido parallelepipedo è uguale a quello d'ogni altro punto della sua massa. Posta al solito $1 : r$ la ragione della pressione alla resistenza d'attrito, è chiaro che l'angolo CDE del piano inclinato CD coll'orizzontale DE, che chiameremo μ, deve essere maggiore dell'angolo che fa il piano FD in cui la sua base DE alla sua altezza FE ha la ragione di $1 : r$.

Ora essendo f la forza acceleratrice della gravità, sarà la forza acceleratrice del corpo A lungo il piano $f . \text{sen.}\, \mu$, presa l'unità pel seno tutto, e per la massa del solido; e siccome poi la pressione del corpo A sul piano CD è $f . \cos. \mu$, sarà la resistenza d'attrito $fr . \cos. \mu$, cui opponesi costantemente alla costante forza che fa discendere il solido, e perciò si avrà nella formula (VII.) la relazione nel movimento uniformemente accelerato del corpo A lungo il piano inclinato CD tra il tempo e la celerità

$$(\text{VII.}) \ldots\ldots f(\text{sen.}\, \mu - \cos. \mu . r)\, t = u .$$

Dicendo qualsivoglia spazio $Ca = x$ si avrà inoltre nella formula (VIII.) la relazione dello spazio alla celerità

(VIII.)

$$(\text{VIII.}) \ldots\ldots f(\text{sen. } \mu - \text{cos. } \mu \,.\, r)\, x = \frac{u^2}{2}$$

e nella formula (IX.) quella del tempo allo spazio

$$(\text{IX.}) \ldots\ldots \tfrac{1}{2} f(\text{sen. } \mu - \text{cos. } \mu \,.\, r)\, t^2 = x\,.$$

Il che ec.

PROBLEMA IV.

Cercare le leggi del moto *concreto*, considerando il solo attrito, d'un corpo rotondo A (*Fig.ª* 4), come una sfera, un cilindro ec., costretto a discendere, cominciando da un dato punto B, per un piano curvilineo B*b*D.

Sia DE l'asse della curva B*b*D, e supposto dalla quiete disceso il corpo A in *a*, si menino dai punti B, *b* di contatto le ordinate BN, *b*M, e le tangenti alla curva BF, *b*G che incontrino l'asse DE prolungato quanto occorre ne' punti F, G. Siano in fine BAH, *ba*L le direzioni de' raggi osculatorj della curva B*b*D ne' punti B *b*, e si calino dal centro di gravità del corpo le verticali AC, *ac* che incontrino le tangenti BF *b*G ne' punti C, *c*.

È manifesto pertanto, che non volendosi avere in considerazione se non che il movimento del centro di gravità del corpo, è duopo prima d'ogni altra operazione, dalla data relazione delle coordinate alla curva B*b*D investigare quella che appartiene alle coordinate della curva A*aa'*, che necessariamente viene descritta dal predetto centro di gravità.

Rappresentandosi poi dalle verticali AC, *ac* il peso assoluto del corpo, ne risulta, per la nota teorìa del piano inclinato, che le forze acceleratrici alla sua discesa sono proporzionali a' coseni degli angoli fatti da' raggi osculatorj con l'asse, e che le pressioni sono proporzionali ai seni degli angoli medesimi: oppure, che mentre le forze acceleratrici ne' diversi punti A, *a*, in cui si trova il solido, sono proporzionali alle sottotangenti FN GM, le pressioni in essi sono proporzionali alle ordinate BN *b*M.

Supposto inoltre che giunto il corpo in *b*, *b*M a MG abbia la ragione della pressione alla resistenza d'attrito, è chiaro che il corpo A discende per l'arco B*b* di moto accelerato; ma che la forza acceleratrice risultante dall'eccesso del momento alla discesa sulla resistenza d'attrito, anderà diminuen-

dosi da B fino a b; e che in seguito procederà verso D di moto ritardato, e che la forza ritardatrice, che riducesi all'intiera resistenza d'attrito, anderà aumentandosi da b fino a D. Essendo ordinariamente molto minore la resistenza d'attrito ne' corpi che muovonsi di moto progressivo e rotatorio insieme in paragone di quella che incontrano i corpi che movonsi di solo moto progressivo, ne avviene che il punto b, che chiameremo il *punto dell' equilibrio*, sarà vicino al vertice D della curva BbD.

Ma sia il proposto piano curvilineo, un quadrante BbD (*Fig.*ª 5) di cerchio, di cui C è il centro, e sia Aaa' il quadrante che descrive il centro di gravità A del corpo, mentre girandosi intorno ad esso discende pel quadrante BbD, e supposto che giunto in b abbia la velocità u, si conducano le ordinate am, bM, le tangenti ag, bG, e la verticale ac. Si dica poscia il raggio CA, o C$a' = b$, ch'è l'altezza della caduta totale, $a'm = x$, $am = \sqrt{(2bx - x^2)}$, e sarà nel tempuscolo δt percorso dal centro a l'archetto $= \frac{-b\delta x}{\sqrt{(2bx-x^2)}}$, a cui si affigge il segno negativo, perchè discendendo il corpo a, va diminuendosi l'arco aa'. E poichè il triangolo bMG è simile ai due triangoli acb, agm, sarà anche il triangolo agm oppure aCm simile al triangolo acb: quindi posta al solito la forza acceleratrice terrestre $= f$, e la massa del corpo, uguale all'unità, sicchè ac denotante il peso assoluto del corpo sia $= f$, sarà il quarto proporzionale alle aC, am, ac, cioè $f.\frac{\sqrt{(2bx-x^2)}}{b}$ l'espressione generale della forza acceleratrice alla discesa del solido a pel canale circolare Aaa', ch'è uguale alla totale f nel punto B, ove è $x = b$; il quarto proporzionale poscia alle aC, Cm, ac, cioè $f.\frac{(b-x)}{b}$ sarà l'espressione generale della pressione che esercita contro il suo fondo, cui è nulla nel punto B, ove è $x = b$, ed è uguale all'intiero peso f nel punto D, in cui $x = 0$. Ora posta la resistenza d'attrito dipendente dalla pressione e dal raggio di rotazione (Prob. II.), cioè $\frac{a}{A}.r = D$; sarà l'espressione generale della resistenza d'attrito, che come forza ritardatrice si oppone alla forza acceleratrice con cui il solido tende alla discesa, $Df.\frac{(b-x)}{b}$: e perciò la residua for-

za acceleratrice alla discesa sarà

$$f\left(\frac{\sqrt{(2bx-x^2)}}{b} - \mathrm{D}\left(\frac{b-x}{b}\right)\right).$$

Per il che avremo da ricavare la relazione tra il tempo e la velocità dalla formula (X.)

$$(\mathrm{X.}) \ldots\ldots\ldots f\left(\frac{\sqrt{(2bx-x^2)}-\mathrm{D}(b-x)}{b}\right)\partial t = \partial u$$

e dalla formula (XI.) quella tra lo spazio e la velocità

$$(\mathrm{XI.}) \ldots -f\left(\sqrt{(2bx-x^2)} - \mathrm{D}\,(b-x)\right) \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{(2bx-x^2)}} = u\partial u\,.$$

Integrando la formula (XI.) si avrà u dato per x, e però avendosi dalla stessa

$$-f\left(\frac{\partial x}{u} - \frac{\mathrm{D}(b-x)\partial x}{u\sqrt{(2bx-x^2)}}\right) = \partial u$$

si avrà anche ∂u dato per x, onde sostituendo un tal valore nella formula (X.) in luogo di ∂u, si scoprirà la formula che somministra la relazione tra il tempo e lo spazio. Il che ec.

Scolio.

Il primo termine del primo membro della formula (XI.) è evidentemente integrabile, il secondo avendo la forma $\frac{b\partial x}{\sqrt{(2bx-x^2)}}$ è il differenziale d'un arco di cerchio del diametro $= 2b$, e di ascissa $= x$, ed il terzo termine, riducendosi all'espressione $x^{\frac{1}{2}}\partial x(1-x)^{-\frac{1}{2}}$, posto $2b = 1$, è il doppio dell'arco di cerchio del diametro $= 1$, e del seno verso $= x$. Ma quanto laboriosa sia l'operazione, onde pervenire, già per approssimazione soltanto, a determinare la relazione tra il tempo e lo spazio del centro di gravità del corpo A nel proposto problema, basta considerare la ricerca semplice di determinare il *tempo che impiega un grave discendente per un canale circolare*, fatta con tutta la sagacità dal Sig. *Malfatti*, come può vedersi nel Tomo VII degli Atti nostri, quantunque abbia esso trattata la questione astrattamente, vale a dire, col supporre il solido come un sol punto pesante, e non tenendo conto della resistenza d'attrito. Passerò ora a risolvere il problema I non trascurando la resistenza dell'aria insieme con quella dell'attrito.

PROBLEMA V.

Determinare il movimento *concreto* del solido A (*Fig.* 1.), che sia un cubo, spinto sul piano orizzontale BB'C, avendo al punto B la velocità dovuta all'altezza DA.

Sia il lato del cubo A $= a$, la sua densità $= \Delta$, la gravità terrestre $= f$, sarà la sua massa $= a^3\Delta$, ed il suo peso $= f \cdot a^3\Delta$, trascurando la detrazione del peso dell'aria sotto l'egual volume, e ponendo $1 : r$ la ragione della pressione all'attrito, si avrà rappresentata la resistenza di esso dalla quantità $fr \cdot a^3\Delta$. Trascorso poscia lo spazio $BB' = x$ dal corpo, si nomini u la velocità di cui si trova dotato, pervenuto in B', a cui competa l'altezza $= s$, e sarà il peso della colonna d'aria, chiamata la sua densità $= \Delta$, che equivale alla resistenza con cui si oppone al suo movimento, espresso dalla quantità $f \cdot a^2\Delta s$, cioè per essere, secondo la legge del moto uniformemente accelerato, $fs = \frac{u^2}{2}$, dalla quantità $a^2\Delta \cdot \frac{u^2}{2}$. Concorrendo pertanto a diminuire il moto del solido sì la resistenza d'attrito, che quella dell'aria, si conoscerà nella formula (XII.) la relazione tra il tempo e la velocità, facendo per maggior chiarezza $a\Delta = p$, $\frac{1}{2}\Delta = 1$, e $pfr = pm$

$$(\text{XII.}) \ldots\ldots \partial t = -\frac{p \cdot \partial u}{pm + u^2}$$

e nella formula (XIII.) quella tra lo spazio e la velocità

$$(\text{XIII.}) \ldots\ldots \partial x = -\frac{p \cdot u\partial u}{pm + u^2}$$

dalle quali due formule dee desumersi quella che dà la relazione tra lo spazio ed il tempo. Il che ec.

SCOLIO.

Le due ora esposte formole, delle quali è palese l'integrazione pegli elementi del calcolo infinitesimale, hanno la stessa forma di quelle che calcolò il P. *Gregorio Fontana* appartenere al movimento di un globo spinto verticalmente all'insù nell'aria, come può vedersi nell'*Appendice* ec. unita all'eccellente sua *Dissertazione idrodinamica, sopra il quesito*, Cercar la cagione, *per la quale l'acqua salendo ne' getti* ec. *coro-*

nata dall'Accademia di Scienze ec. di Mantova, e colà pubblicata l'anno 1775; quindi giudico superfluo il ripetere qui lo sviluppo di dette formole già fatto dal prelodato Autore con la solita sua perspicacia ed esattezza.

Sieno questi miei brevi saggi valutati di qualche utilità nella vasta e tuttavia incognita *Scienza del moto concreto de' corpi*, che può dirsi, essere di tal indole rispetto alla *Scienza del moto astratto*, qual è quella del finito verso l'infinito. Egli è vero che parecchj insigni Geometri presero a trattare intorno a siffatta Scienza alcuni particolari suggetti o problemi, già estesamente trattata dal sommo *Eulero* (*Mechanica sive motus Scientia etc. Petropoli*. An. 1736); ma la resistenza che venne presa di mira fu soltanto quella con cui si oppongono i mezzi dentro i quali movonsi i corpi, e vennero essi considerati come un sol punto pesante: lavoro perciò ben lontano per giugnere a determinare le leggi del moto de' corpi naturali, che dipendono dalla resistenza de' mezzi, da quella dell'attrito di tanto maggior riguardo in paragone della prima, e dalla loro figura e grandezza insieme. Se è necessario assumere il corpo nella sua grandezza e figura riguardo al calcolo della resistenza del mezzo, niente meno lo è per investigare le leggi del moto rotatorio, qualvolta questo, in virtù della figura singolarmente del corpo, non va disgiunto dal progressivo: movimento di cui la natura più di frequente servesi ne' suoi fenomeni. Negli atti nostri si riscontra (Tom. IV) la pregevole Memoria *Della forza viva di alcuni corpi che ruzzolano sopra un piano orizzontale* ec. del Sig. Co. *Giordano Riccati*, e forse qualche lume potrebbe recare anche l'altra Memoria *Del moto rotatorio spontaneo de' corpi* (Tomo V) a chi rivolger volesse i proprj studj in così importantissima Scienza, e non sarà inoltre difficile che qualche perspicace ingegno scopra de' metodi per rendere più facili e semplici le sue applicazioni alla pratica.

PENDOLO IDROMETRICO COMPOSTO.

MEMORIA

Del Sig. Giuseppe Venturoli.

Ricevuta li 15 *Luglio* 1808.

1. Gli strumenti destinati a misurare la velocità delle acque correnti ponno riferirsi a due classi; poichè altri sono galleggianti, ed altri fissi.

2. Alla prima classe appartengono oltre il galleggiante semplice, anche l'asta ritrometrica, ed il galleggiante composto; recenti ed utili invenzioni de' chiarissimi Consocj *Bonati* e *Brunacci*. Speditissimo è l'uso di questi strumenti; l'osservatore gli lascia in balìa della corrente, nè gli rimane altra cura se non che di misurare la velocità colla quale camminano, e di rilevare presso a poco la loro declinazione dalla verticale.

3. Ma d'altra parte l'uso loro è ristretto ad esplorare il corso dell'acqua solamente nel filone, e nella perpendicolare che al filone corrisponde; e così non ponno servire al principale intento di queste sperienze, qual è di conoscere la velocità in tutti i punti d'una proposta sezione onde averne la velocità media e la portata. Per questo fine conviene ad ogni modo ricorrere a quegli strumenti che possano fermarsi sopra qualsivoglia perpendicolare della sezione, e ricercarne ogni punto.

4. Di questa seconda classe di strumenti ne sono stati immaginati ben molti. Ma sia per le gravi eccezioni che incontrarono, sia pel troppo difficile ed operoso maneggio, presso che tutti sono oggimai disusati. Il tubo di *Pitot*, ed il pendolo idrometrico sono i soli che io veggio posti in qualche uso, e commendati anche al dì d'oggi.

5. Pregiasi il tubo di *Pitot* per la facilità dell'osservazione, e per la poca briga del calcolo. Se non che nei grandi e rapidi fiumi riesce difficile il poterlo fissar saldamente a qual-

che profondità. E d'altra parte nelle tarde correnti l'altezza della colonna prominente è sì poca, che ogni picciolo errore fa gran divario. Già l'ondeggiar continuo dell'acqua entro il tubo non permette di misurar con precisione codesta altezza. Ora la velocità ordinaria de' fiumi mezzani non eccede guari (*a*) metri 0,75; onde la colonna non arriva a sporgere di tre centimetri. E per poco che si sbagli nel misurare un alzamento sì picciolo, ne viene un errore ben grande nella stima della velocità.

6. Miglior di tutti senza paragone sarebbe quello strumento, che prima di tutti fu immaginato, voglio dire il pendolo idrometrico. Ma l'incurvamento del filo sott'acqua rende affatto fallace l'osservazione dell'angolo per cui esso filo declina dalla verticale. Poichè la declinazione del filo dove sporge fuori dalla corrente è ben diversa dalla declinazione dello stesso filo nell'altro suo capo dov'è attaccata la palla, e solamente quest'ultima declinazione serve a misurare la forza con cui essa palla è percossa. Nè vi è modo di conoscere uno di questi angoli per mezzo dell'altro; poichè il rapporto loro dipende dalla curva del filo, e questa curva dipende dalla scala delle velocità, che è appunto quella che si cerca.

7. Io non so come non s'avvidero di questa fallacia quegl' idrometri che hanno maneggiato così di frequente il pendolo idrometrico. *Zendrini* che nelle Sezioni di Po fece con esso tante prove, pare che punto non s'accorgesse dell'incurvamento del filo, ed il P. *Lecchi* che ben se ne accorse, pur non ne fece gran caso. Fu il chiarissimo Sig. *Bonati* che ritrasse gl'idrometri da un inganno così universale.

8. Rincresceva il dover abbandonare uno strumento altronde sì comodo; onde si pensò a correggerlo. Nel 1797 il P. *Ferrari* (*b*) propose per tal effetto un suo divisamento. Ma il Sig. *Bonati* (*c*) vi trovò le stesse eccezioni per riguardo alla teoria, ed io temerei pure che fosse per incontrar non poche difficoltà per riguardo alla pratica, se si volesse mettere a prova.

9. Una correzione più facile del pendolo idrometrico io proposi all'Accademia delle Scienze di Bologna nello stesso

---

(*a*) *Ximenes* Nuove sperienze idrauliche art. 104.
(*b*) Dissertazioni idrauliche. Milano 1797.
(*c*) Società Italiana Tom. VIII, Part. II.

anno 1797. Questa consiste nel sostituire al filo colla palla una semplice asta e canna cilindrica, la quale immergendosi a poco a poco sotto il pelo della corrente, col progresso delle sue declinazioni dalla verticale dimostri il progresso delle velocità. Ne feci anche un cenno negli Elementi d'Idraulica (*a*) che ho pubblicati l'anno scorso, ed or mi propongo di spiegarla distesamente, parendomi pregio dell'opera il ridonare all'idrometria uno strumento così semplice e così comodo.

10. Sia l'asta cilindrica ed omogenea AG (*Fig.* 1) sospesa dall'estremo A, e sommersa nella corrente pel tratto CG. Sia questo tratto diviso negl'intervalli eguali C*p*, *pq*, *qr* ec. Dicasi la lunghezza AG $= a$, la lunghezza della parte sporgente AC$=m$, la lunghezza di ciascuno degl'intervalli C*p*,*pq* ec. $= 2n$. Dicasi il raggio della sezion trasversale dell'asta $= r$, la gravità specifica dell'asta $= 1 + \gamma$ (essendo quella dell'acqua $= 1$), e la sua declinazione dal perpendicolo, ossia l'angolo $b\text{AG} = \varphi$. Finalmente le velocità colle quali l'acqua percuote i tratti C*p*, *pq*, *qr* ec. sieno rispettivamente dovute alle altezze f, f', f'' ec.

11. Tre forze diverse agiscono sull'asta. La prima è il di lei peso, che chiamando π il rapporto della circonferenza al diametro del cerchio, trovasi $= a\pi r^2(1+\gamma)$. Questa forza agisce verticalmente, e risolvendola in due l'una normale ad AG, e l'altra secondo AG, risulta la prima $= a\pi r^2(1+\gamma)\sin.\varphi$. E dovendosi questa forza intendere applicata al punto di mezzo della AG, il suo momento per inclinar l'asta attorno il punto A viene $= \frac{1}{2}a^2\pi r^2(1+\gamma)\sin.\varphi$.

12. La seconda forza è la spinta verticale dell'acqua contro la parte sommersa CG. È questa forza $= (a-m)\pi r^2$, ed esercita in direzione perpendicolare all'asta lo sforzo $= (a-m)\times \pi r^2 \sin.\varphi$. Devesi poi intendere applicata al punto di mezzo della CG, onde il suo momento rispetto al punto A risulta $= \frac{1}{2}(a^2-m^2)\pi r^2 \sin.\varphi$.

13. La terza forza si è l'urto della corrente contro l'asta. L'urto dell'acqua contro la superficie d'un cilindro vale (*b*) gli undici ventesimi dell'urto diretto contro la sezion longitudinale

---

(*a*) Lib. III, Cap. 15.
(*b*) *Alembert*, *Condorcet* et *Bossut* Nouv. Expériences sur la résist. des fluides; Exp. 185 . . . . . 194.

dinale di esso cilindro. Ciò posto, seguendo la nota dottrina della resistenza de' fluidi, troveremo gli urti normali contro i singoli tratti Cp, pq, qr ec. essere $\frac{11}{10}\cdot 2nrf\cos.\varphi^2$, $\frac{11}{10}\cdot 2nrf'\times\cos.\varphi^2$, $\frac{11}{10}\cdot 2nrf''\cos.\varphi^2$ ec. Questi urti si debbono applicare ai punti di mezzo de' rispettivi tratti Cp, pq, qr ec. e le distanze di questi punti da A sono $m+n$, $m+3n$, $m+5n$ ec. Laonde il total momento della percossa dell'acqua contro tutta la CG viene ad essere

$$\frac{11}{10}\cdot 2nr\cos.\varphi^2\{(m+n)f+(m+3n)f'+(m+5n)f''\ldots.\}$$

14. Di queste tre forze la prima tende a piegar l'asta a basso, e ricondurla alla situazion verticale, le altre due hanno effetto contrario. Eguagliando il momento della prima a quelli delle altre due, siccome richiede l'equilibrio, troveremo (preso $\pi=\frac{22}{7}$) l'equazione

$$(E)\ \frac{10r\sin.\phi}{7\cos.\phi^2}(a^2\gamma+m^2)=2n(m+n)f+2n(m+3n)f'+2n(m+5n)f''+\ldots.$$

15. Ciò premesso, ecco la via da tenersi per cercare col pendolo le velocità nella perpendicolare Bb. Collocato il centro A sulla proposta perpendicolare, vadasi esso di mano in mano abbassando in guisa che da prima si tuffi sott'acqua l'ultima divisione Gh, indi la seguente hk, poi la terza ki, e così successivamente ad ogni ripresa un nuovo intervallo si nasconda sotto il pelo della corrente. Si noti ad ogni volta il corrispondente angolo φ. Dalla serie di questi angoli conosceremo il progresso delle velocità mediante il calcolo seguente.

16. Siano le situazioni dell'asta ne' consecutivi abbassamenti (*Fig.* 2) AG, AG, AG, ec. così che da prima si trovi sott'acqua il tratto estremo Gh, poscia il tratto doppio Gk, indi il triplo Gi, e così di mano in mano. Gli angoli di declinazione A, A, A ec. del più alto venendo al più basso si distinguano colle lettere φ, φ', φ'' ec. e le lunghezze dell'asta sporgenti fuor d'acqua Ah, Ak, Ai ec. colle lettere m, m', m'' ec. Pei termini G, G, G si conducano le orizzontali GM, GN, GO le quali nelle porzioni sommerse dell'asta seghino gl'intervalli hG, $k\beta$, βG ec. Ognuno di questi intervalli s'intenda diviso per mezzo ne' punti Q, R, S ec. Mentre poi l'asta nel suo discendere viene successivamente investita dalle colonne d'acqua sempre più basse BM, MN, NO ec. le velocità di queste colonne siano rispettivamente dovute alle altezze f, f', f'' ec.

17. L'equilibrio dell'asta nelle successive posizioni AG, AG, AG ec. ne somministrerà altrettante equazioni analoghe all'equazione (E) dell'art. 14. La formola $\frac{10r\sin.\phi}{7\cos.\phi^2}(a^2\gamma+m^2)$ si faccia per brevità $=M$, e le lettere M', M'' ec. denotino la stessa formola, poste in luogo di ϕ e di m le lettere ϕ', ϕ'' ec. m', m'', ec. Le equazioni sopra dette saranno

$$M = hG \,.\, AQ \,.\, f$$
$$M' = k\beta \,.\, AR \,.\, f + \beta G \,.\, AS \,.\, f'$$
$$M'' = i\gamma \,.\, AT \,.\, f + \gamma\delta \,.\, AV \,.\, f' + \delta G \,.\, AX \,.\, f''$$

. . . . . .

Resta solo che troviamo le espressioni analitiche delle linee hG, AQ, $k\beta$ ec.

18. Ora abbiamo $BM = 2n\cos.\phi$, $BN = 4n\cos.\phi'$, $BO = 6n\cos.\phi''$, onde $MN = 4n\cos.\phi' - 2n\cos.\phi$, $NO = 6n\cos.\phi'' - 4n\cos.\phi'$. Quindi $hG = 2n$

$$k\beta = \frac{2n\cos.\phi}{\cos.\phi'} \quad ; \quad \beta G = \frac{4n\cos.\phi' - 2n\cos.\phi}{\cos.\phi'}$$

$$i\gamma = \frac{2n\cos.\phi}{\cos.\phi''} \quad ; \quad \gamma\delta = \frac{4n\cos.\phi' - 2n\cos.\phi}{\cos.\phi''} \quad ; \quad \delta G = \frac{6n\cos.\phi'' - 4n\cos.\phi'}{\cos.\phi''}$$

. . . . . .

E finalmente

$$AQ = m + n$$

$$AR = m' + \frac{n\cos.\phi}{\cos.\phi'} \quad ; \quad AS = m' + \frac{2n\cos.\phi' + n\cos.\phi}{\cos.\phi'}$$

$$AT = m'' + \frac{n\cos.\phi}{\cos.\phi'} \quad ; \quad AV = m'' + \frac{2n\cos.\phi' + n\cos.\phi}{\cos.\phi'} \quad ; \quad AX = m'' + \frac{3n\cos.\phi'' + 2n\cos.\phi'}{\cos.\phi''}$$

. . . . . .

19. Per abbreviare si faccia

$$2n\cos.\phi = \alpha \qquad n\cos.\phi = \beta$$
$$4n\cos.\phi' - 2n\cos.\phi = \alpha' \qquad 2n\cos.\phi' + n\cos.\phi = \beta'$$
$$6n\cos.\phi'' - 4n\cos.\phi' = \alpha'' \qquad 3n\cos.\phi'' + 2n\cos.\phi' = \beta''$$

. . . .

Le denominazioni del precedente articolo si scriveranno più brevemente così

$$hG = \frac{\alpha}{\cos.\phi}$$

$$k\beta = \frac{\alpha}{\cos.\phi'} \quad ; \quad \beta G = \frac{\alpha'}{\cos.\phi'}$$

$$\gamma = \frac{a}{\cos.\varphi''} \quad ; \quad \gamma\delta = \frac{a'}{\cos.\varphi''} \quad ; \quad \delta G = \frac{a''}{\cos.\varphi''}$$

. . . . . .

$$AQ = m + \frac{b}{\cos.\varphi}$$

$$AR = m' + \frac{b}{\cos.\varphi'} \quad ; \quad AS = m' + \frac{b'}{\cos.\varphi'}$$

$$AT = m'' + \frac{b}{\cos.\varphi''} \quad ; \quad AV = m'' + \frac{b'}{\cos.\varphi''} \quad ; \quad AX = m'' + \frac{b''}{\cos.\varphi''}$$

. . . . . .

20. Sostituiti questi valori, le equazioni dell'art. 17 riescono

$$M = \frac{a}{\cos.\varphi}\left(m + \frac{b}{\cos.\varphi}\right) f$$

$$M' = \frac{a}{\cos.\varphi'}\left(m' + \frac{b}{\cos.\varphi'}\right) f + \frac{a'}{\cos.\varphi'}\left(m' + \frac{b'}{\cos.\varphi'}\right) f'$$

$$M'' = \frac{a}{\cos.\varphi''}\left(m'' + \frac{b}{\cos.\varphi''}\right) f + \frac{a'}{\cos.\varphi''}\left(m'' + \frac{b'}{\cos.\varphi''}\right) f' + \frac{a''}{\cos.\varphi''}\left(m'' + \frac{b''}{\cos.\varphi''}\right) f''$$

. . . . . .

21. Tante sono queste equazioni, quante le incognite f, f', f'' ec. determinate le quali conosceremo le velocità della corrente negli strati BM, MN, NO ec. che saranno $\sqrt{2gf}$, $\sqrt{2gf'}$, $\sqrt{2gf''}$ ec. esprimendo per g la gravità, onde in metri sarà $g = 9,8088$. E la portata della perpendicolare BMNO.... ossia la quantità dell'acqua fluente per essa in un minuto secondo sarà

$$a\sqrt{2gf} + a'\sqrt{2gf'} + a''\sqrt{2gf''} + \text{ec.}$$

22. Dichiarata sin qui la teoria del pendolo composto, soggiungerò alcune poche avvertenze opportune a renderne la pratica quanto più si può agevole e sicura. Ed in primo luogo io non credo che il calcolo occorrente per trovare le successive velocità possa parer troppo lungo a qualsivoglia mezzano calcolatore. Oltre di che osservo che per aver la portata con sufficiente esattezza basteranno comunemente tre o quattro immersioni tutt'al più. A rigore, se le velocità calano andando dal pelo d'acqua verso il fondo, la portata che si calcola riuscirà alcun poco minore del giusto; e se crescono, riuscirà alcun poco maggiore. Imperocchè le velocità dovute alle altezze f, f', f'' ec. sono nel primo caso alquanto minori che non sono le velocità medie de' corrispondenti intervalli a, a', a'' ec. e nel secondo caso alquanto più grandi. Con

tutto ciò quest'aberrazione è tanto più leggera, quanto meno variano le velocità entro gl'intervalli suddetti; e siccome per ordinario la degradazione delle velocità è assai lenta, così l'errore sarà comunemente insensibile.

23. Che se poi si volessero le immersioni più spesse, affine di riconoscere più minutamente la degradazione delle velocità, allora in vece delle equazioni dell'art. 20 potremmo calcolare queste altre

$$\frac{1}{2n} \cdot M = (m + n) f$$

$$\frac{1}{2n} \cdot M' = (m' + n) f + (m' + 3n) f'$$

$$\frac{1}{2n} \cdot M'' = (m'' + n) f + (m'' + 3n) f' + (m'' + 5n) f''$$

. . . . . .

ovvero

$$\frac{1}{2n} \cdot M = (a - n) f$$

$$\frac{1}{2n} \cdot M' = (a - 3n) f + (a - n) f'$$

$$\frac{1}{2n} \cdot M'' = (a - 5n) f + (a - 3n) f' + (a - n) f''$$

. . . . . .

le quali si formano e si calcolano assai più speditamente. Le velocità determinate da queste equazioni sono prossimamente le velocità de' punti equidistanti della perpendicolare Bb; fra le quali prenderemo la velocità media, che moltiplicata per Bb darà a conoscere la portata.

24. Ma l'avvertenza più essenziale si è che la declinazione φ non oltrepassi li 30 gradi, eziandio nelle immersioni più profonde. Poichè altrimenti l'angolo d'incidenza col quale l'acqua investe l'asta del pendolo tornerebbe minore di 60 gradi. Or si sa che al di sotto dei 60 gradi gli urti cominciano a scostarsi sensibilmente dalla proporzione de' quadrati dei seni d'incidenza, proporzione che abbiamo adottata nella Teoria.

25. D'altra parte giova tener l'asta leggera il più che si può, affinchè le declinazioni vengan grandi, e le differenze loro facilmente si discernano. Adunque convien procurare di dare all'asta quella gravità specifica che occorre affinchè nell'immersione infima essa declini dalla verticale per trenta gradi, o poco meno.

26. Questa gravità specifica per quanto all'uopo nostro si richiede, potrà determinarsi a un dipresso nel seguente modo. Trovisi colla prova d'un galleggiante la velocità superficiale della corrente. Ora se io suppongo che questa velocità si mantenga uguale per tutta la perpendicolare, e suppongo l'asta immersa a quella maggior profondità a cui voglio arrivare, in questa ipotesi troverò facilmente qual debba essere la gravità specifica dell'asta, affinchè sia $\varphi = 30°$. Il che avrò dall'equazione

$$\frac{10r\sin.\varphi}{7\cos.\varphi^2}\left(a^2\gamma + m^2\right) = 2n\left(m + n\right)f$$

dove $2n$ sarà la lunghezza di tutta la parte sommersa, ed m la lunghezza della parte che sporge. Determinato per questa equazione il γ, sarà $1 + \gamma$ la gravità specifica conveniente all'asta da adoperarsi. Poichè se le velocità da cima a fondo decrescono, siccome avvien quasi sempre, avrò nell'immersione più profonda una declinazione alquanto minore dei trenta gradi, e così starò sul sicuro.

27. Ma poichè ogni sezion diversa richiederà diversa gravità specifica, converrebbe mutar asta ad ogni esperimento. A quest'incomodo si provvede con un facil ripiego. Un'asta vuota al di dentro a modo di canna, il peso della quale potrà accrescersi a piacere col versare entro il cavo, della pallina o migliarola di piombo, si accomoda con somma facilità a tutti i casi. Un breve calcolo ci mostrerà quanto peso di pallina si debba gettare nel vano della canna, affinchè le sue declinazioni tornino le stesse che sarebbono se l'asta fosse omogenea ed avesse la gravità specifica determinata nell'articolo precedente.

28. Sia p il raggio della sezion cilindrica del vano della canna; e sia $1 + \gamma$ la gravità specifica della canna vuota; $1 + \delta$ la gravità specifica conveniente all'esperimento (art. 26); e finalmente $1 + \lambda$ la gravità specifica della pallina. Convien cercare qual peso P di pallina debbasi introdurre nella canna, affinchè il momento del suo peso riesca lo stesso che se l'asta fosse omogenea con gravità specifica $= 1 + \delta$. E si troverà

$$P = a - a\sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{p^2}\cdot\frac{\delta-\gamma}{1+\lambda}\right)}.$$

29. Per ultimo dirò alcuna cosa della forma del sostegno, o armatura del pendolo, la quale mi piacerebbe che fosse a

questo modo. In riva alla corrente ergasi una colonnetta di legno divisa minutamente in parti eguali. Quindi esca e sporga sopra il fiume con braccio o spranga orizzontale di metallo, lunga quanto più si può, ed infilata per una staffa quadra alla colonnetta in guisa da potere scorrere su e giù per essa, e fermarsi a vite dove si vuole. Penda da questo braccio l'asta del pendolo mediante un anello inserito nella spranga, e che permetta all'asta la libertà di girare a seconda della corrente. E possa quest'anello facilmente trascorrere lungo la spranga, così che possiamo ora portarlo avanti quanto comporta la lunghezza della spranga, ed ora ritirarlo più vicino alla sponda.

30. Parmi che questa foggia di sostegno ne prometta diversi vantaggi. Il primo è di potere in una sola stazione esplorare più d'una perpendicolare. Ne' piccioli canali spesse volte verrà fatto di compiere la misura dell'intera sezione con una stazion sola, o al più con due che si facciano l'una rimpetto all'altra nelle due rive opposte. Nè vi sarà bisogno o di gettare un ponte, o di portar lo strumento su d'una barca. Quando poi sia necessario ricorrere a questi ripieghi, sarà sempre un vantaggio il potersi estendere alle perpendicolari alquanto discoste dal ponte, o dalla barca, ed esenti dalle alterazioni che la vicinanza di questi ostacoli potrebbe indurre.

31. In secondo luogo mentre abbassiamo il braccio orizzontale sicchè il pelo dell'acqua tocchi successivamente i punti h, k, i ec. (*Fig.* 1) noi mediante le divisioni della colonnetta sappiamo ad ogni volta l'altezza del centro di sospensione sopra il piano in cui posa il piede dello strumento, ed aggiungendovi l'elevazione di questo piano sopra il pelo dell'acqua, conosciamo a ciascuna immersione l'altezza AB.

32. In terzo luogo non v'è bisogno di quadrante per misurare le declinazioni del pendolo. Poichè conoscendo noi ad ogni volta AB, ed AC, conosciamo anche $\cos. \varphi = \frac{AB}{AC}$.

33. Queste facilità mi fanno ravvisare nel pendolo composto quelle migliori condizioni che possono richiedersi in uno strumento idrometrico. Bramerei che altri s'invogliasse di farne la prova, ed io pure mi propongo di farla a qualche tempo, giacchè il pratico maneggio dello strumento potrà forse condurci a perfezionarlo maggiormente, siccome pure a trovar compenso ai difetti che per avventura vi si scoprissero.

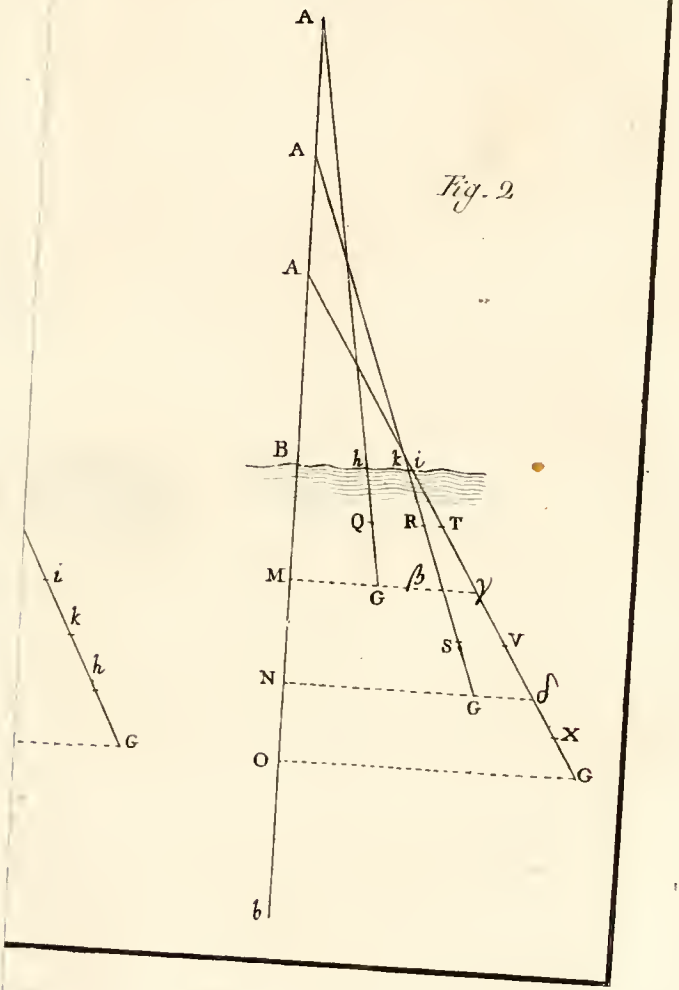


Fig. 2

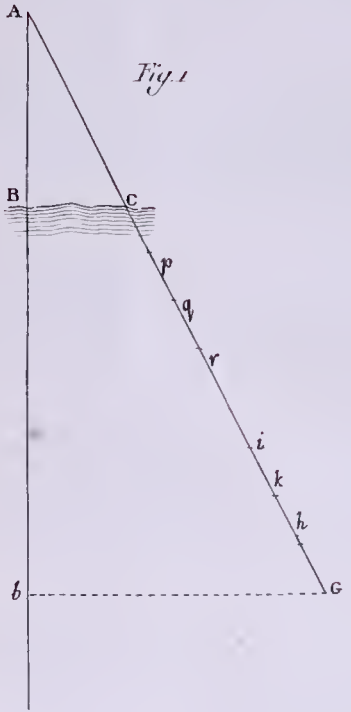


Fig. 1

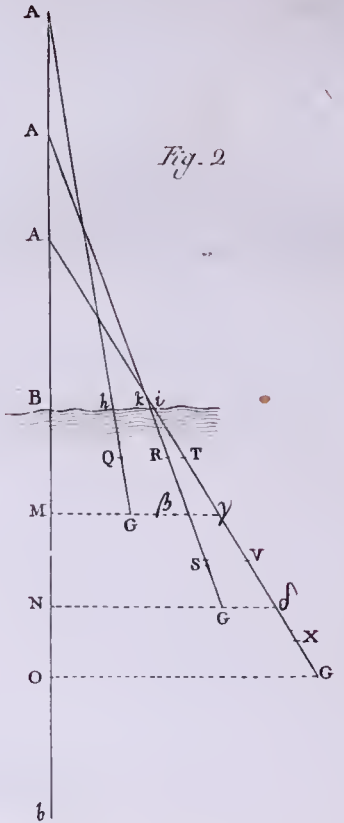


Fig. 2

DELLA RISOLUZIONE DE' PROBLEMI DI MASSIMO O MINIMO, QUANDO LA QUANTITÀ, CHE VUOLSI MASSIMA O MINIMA, È DATA.

Del Sig. Sebastiano Canterzani.

Ricevuta li 10 *Ottobre* 1808.

Sono certe questioni di massimo o minimo, alle quali non è, almeno immediatamente, applicabile la regola generale, che prescrive che mettasi eguale a zero il differenziale della quantità, che si vuole massima o minima. Tali sono certamente quelle, che il sommo Geometra *Lodovico De la Grange* insegnò di sciorre dipendentemente dalla teoria delle frazioni continue. Tali pure sono quelle, che il grande *Eulero* insegnò di sciorre col calcolo delle variazioni da lui inventato, e ridotto poscia a singolare semplicità dal non mai abbastanza lodato Sig. *De la Grange*.

A prima vista sembran pure tali quelle questioni, in cui la quantità, che vuolsi massima o minima, è data; perchè essendo data, e quindi costante, non ammette differenziale.

Il celebre *Gabriel Manfredi* trattava questi problemi nella seguente maniera. Inverteva il problema così che fosse dato quel che era incognito, e incognito quel che era dato: in tal modo la quantità, che volevasi massima o minima, diveniva variabile. Scioglieva dunque il problema inverso; indi nell'equazione, a cui giungeva, sostituiva in luogo delle quantità in essa contenute i valori, che loro competevano nel problema diretto. Recava per esempio il problema: data la retta AB (*Fig.* 1) e dato in essa il punto C, trovare l'angolo ADB, in cui la retta AB resta inscritta in modo che sia la minima delle rette, che gli si possono inscrivere per il punto C.

Inverteva egli il problema così: dato l'angolo ADB, e nel di lui piano il punto C, trovare la AB minima delle rette, che inscriver gli si possono per il punto C. Tirata per C la retta EF perpendicolare all'uno de' cruri DA dell'angolo, e

fatta DE $= f$, EF $= g$, EC $= h$, EA $= x$; condotta in oltre CO parallela ad AD, trovava

$$AB = \frac{(fg+gx)\sqrt{hh+xx}}{gx+fh}$$

di cui il differenziale, presa x variabile, posto eguale a zero somministra l'equazione $gx^3+2fhx^2+f^2hx+fh^3-fgh^2=0$.

Ma il problema da prima proposto porta che sia data la retta AB col punto in essa C, onde uno de' segmenti sia AC$=a$, l'altro CB$=b$, e dimanda che si trovi l'angolo ADB, il quale dovendo co' suoi cruri passare per li punti estremi della data retta resta solo che rispetto a questa retta si determini il punto D, dove aver dee il suo apice. Chiamava egli pertanto la distanza DS di tal punto dalla retta AB$=y$, e la porzione AS, che in questa retta taglia la perpendicolare DS, chiamava $=z$. Aveva così DA $= \sqrt{zz+yy}$. Essendo AD : DS :: AC : CE, cioè $\sqrt{zz+yy} : y :: a : h$, otteneva $h = \frac{ay}{\sqrt{zz+yy}}$; ed essendo pure AS : DS :: AE : EC, cioè $z : y :: x : \frac{ay}{\sqrt{zz+yy}}$ otteneva $x = \frac{az}{\sqrt{zz+yy}}$; e quindi DE $= f = \sqrt{zz+yy} - \frac{az}{\sqrt{zz+yy}}$. Per ultimo condotta da C la CT parallela a DB, essendo AB : AD :: AC : AT, cioè $a+b : \sqrt{zz+yy} :: a :$ AT ricavava AT $= \frac{a\sqrt{zz+yy}}{a+b}$, e quindi ET$=AT-AE= \frac{a\sqrt{zz+yy}}{a+b} - \frac{az}{\sqrt{zz+yy}} = \frac{az^2+ay^2-a^2z-abz}{(a+b)\sqrt{zz+yy}}$: ma ET : EC :: DE : EF, cioè $\frac{az^2+ay^2-a^2z-abz}{(a+b)\sqrt{zz+yy}} : \frac{ay}{\sqrt{zz+yy}} :: \frac{zz+yy-az}{\sqrt{zz+yy}} : g$; dunque $g = \frac{(a^2y+aby)(zz+yy-az)}{(az^2+ay^2-a^2z-abz)\sqrt{zz+yy}}$.

Ricavati questi valori di f, g, h, x li sostituiva nell'equazione ritrovata, e così finalmente arrivava ad ottenere $z = b$: il che mostra, che prendendo su la data retta AB la AS $=$ CB, e condotta ad essa la perpendicolare SD, ogni punto di questa perpendicolare indefinitamente prodotta, essendo sparita la y, può essere l'apice dell'angolo cercato.

Il metodo è ingegnoso; ma pare che il calcolo, che occorre fare, possa, almeno in molti casi, riuscir più comodo, se nel formare la formola, il cui differenziale nel problema inverso dee porsi eguale a zero, si abbia l'avvertenza di farvi

entrare

entrare le quantità, che servono a determinar quella, che cercasi nel problema diretto; poichè così si ottengono immediatamente due equazioni, l'una delle quali è la formola suddetta posta eguale alla quantità data, che vuolsi massima o minima; l'altra è il differenziale della formola stessa posto eguale a zero. Col mezzo di queste due equazioni ottiensi senz'altro il valore delle quantità, che sciolgono il problema diretto.

Per non dipartirci dall'esempio proposto, fatta $AC = a$, $CB = b$, prendasi $AS = z$, $SD = y$, che sono le linee, che servono a trovare l'angolo cercato nel problema, le quali linee nel problema inverso sono costanti. Supposta ora la EF una retta qualunque inscritta all'angolo pel punto C, da E tirisi EG perpendicolare a SD, e pongasi $SG = m$, e sarà m variabile nel problema inverso. Essendo CT parallela a DB, sarà $AB : AD :: AC : AT$, cioè $a + b : \sqrt{zz + yy} :: a : AT$, onde $AT = \frac{a\sqrt{zz+yy}}{a+b}$, e $AB : AD :: CB : TD$, cioè $a+b : \sqrt{zz+yy} :: b : TD$, onde $TD = \frac{b\sqrt{zz+yy}}{a+b}$. Ma $DS : DA :: SG : AE$, cioè $y : \sqrt{zz+yy} :: m : AE$, e però $AE = \frac{m\sqrt{zz+yy}}{y}$. Sarà pertanto $ET = AT - AE = \frac{(ay-am-bm)\sqrt{zz+yy}}{(a+b)y}$. Ora condotta da E la perpendicolare ER ad AB si avrà $DS : AS :: ER : AR$, cioè $y : z :: m : AR = \frac{mz}{y}$, e però $RC = a - \frac{mz}{y}$, e $CE = \sqrt{m^2 + (a - \frac{mz}{y})^2}$. Finalmente posta la CO parallela a DA, sarà $CO = TD$, e si avrà $ET : EC :: CO : CF$, cioè $\frac{(ay-am-bm)\sqrt{zz+yy}}{(a+b)y} : \sqrt{m^2 + (a - \frac{mz}{y})^2} :: \frac{b\sqrt{zz+yy}}{a+b} : CF$, e quindi $CF = \frac{by\sqrt{m^2 + (a - \frac{mz}{y})^2}}{ay - am - bm}$. Dunque $EF = CE + CF = \frac{(a+b)(y-m)\sqrt{m^2 + (a - \frac{mz}{y})^2}}{ay - am - bm}$.

Questa è la formola, che deve riuscir eguale ad $a + b$, e che nel medesimo tempo aver deve eguale a zero il suo differenziale preso nel supposto di m variabile. Ecco dunque le due equazioni

$$\frac{(a+b)(y-m)\sqrt{m^2+(a-\frac{mz}{y})^2}}{ay-am-bm}=a+b$$

$$\frac{\left(-\eth m\sqrt{m^2+(a-\frac{mz}{y})^2}+\frac{(y-m)\left(m\eth m-\frac{z\eth m}{y}(a-\frac{mz}{y})\right)}{\sqrt{m^2+(a-\frac{mz}{y})^2}}\right)(ay-am-bm)+\eth m(a+b)(y-m)\sqrt{m^2+(a-\frac{mz}{y})^2}}{(ay-am-bm)^2}=0$$

Senza aver bisogno di sviluppare i diversi valori, che competono all'incognita m nella prima equazione, egli è certo che quello convien tra essi scegliere, il quale fa che non solo sia la prima parte di quell'equazione eguale alla seconda, ma porta in oltre che i due segmenti CE, CF sieno il primo al secondo come AC:CB, cioè sia $\sqrt{m^2+(a-\frac{mz}{y})^2}:\frac{by\sqrt{m^2+(a-\frac{mz}{y})^2}}{ay-am-bm}::a:b$, la qual analogìa ne presenta l'equazione $aby-abm-b^2m=aby$, che ci dà $m=0$: e questo è il valore, che non solo soddisfa alla prima equazione, ma che messo nella seconda ci dee dare la soluzione del problema. Ora l'altra equazione, ove sia $m=0$, diventa $(-a\eth m-z\eth m)ay+ay\eth m(a+b)=0$, la quale divisa per $ay\eth m$ riesce $-a-z+a+b=0$, che, appunto come prima, dà $z=b$.

Stando le cose in questi termini, quando la quantità, che dev'essere massima o minima, è data, può dirsi, che senza pensar a invertere il problema basta trovare la formola, che dipendentemente da una qualche variabile esprima in generale la quantità, che esser dee massima o minima. Poichè mettendo questa formola eguale alla quantità medesima data si ha un'equazione, e mettendone eguale a zero il differenziale si ha un'altra equazione, e da queste due equazioni si cava senz'altro quella, che direttamente scioglie il problema. Quantunque ciò venga comprovato nella condotta tenutasi ultimamente per la soluzione del problema Manfrediano, pure giova recarne anche un altro, e sia il seguente.

Data la durata del crepuscolo trovare la latitudine terrestre, sotto la quale il crepuscolo minimo è della durata data. Sia (*Fig.* 2) Z il vertice, HO l'orizzonte, RS il circolo finitore del crepuscolo, P il polo settentrionale, EN la declinazione australe del Sole, e NI il parallelo descritto dal Sole, il

quale tagli l'orizzonte in L, e il circolo RS in I. Condotti i due orarj PL, PI l'angolo IPL è proporzionale alla durata del crepuscolo, e però dove questa è minima, minimo è pure quest' angolo, e quindi anche il seno della sua metà. L'arco ZE corrispondente alla latitudine terrestre cercata mettasi $= z$, la declinazione del sole $EN = b$, l'arco di meridiano $HR = OS = c$. La durata data del crepuscolo sia $= h$ esprimendo h ore e parti di ora. Facendo $24 : h :: 360$ al quarto, si avrà in questo quarto proporzionale il numero de' gradi corrispondenti al tempo h, cioè si avrà la misura dell'angolo IPL, che perciò sarà di gradi $15h$.

Nel triangolo sferico IPZ abbiamo il lato $PZ = 90° - z$, il lato $PI = 90° + b$, e il lato $ZI = 90° + c$; onde sarà $\text{sen.}\frac{IPZ}{2} = \sqrt{\frac{\cos.z \cdot \cos.b - \text{sen.}z \cdot \text{sen.}b + \text{sen.}c}{2 \cdot \cos.z \cdot \cos.b}}$. Nel triangolo poi LPZ oltre il lato $PL = PI = 90° + b$, e il lato $PZ = 90° - z$ abbiamo il lato $ZL = 90°$; onde sarà $\text{sen.}\frac{LPZ}{2} = \sqrt{\frac{\cos.z \cdot \cos.b - \text{sen.}z \cdot \text{sen.}b}{2 \cdot \cos.z \cdot \cos.b}}$. I coseni per tanto di questi due angoli saranno

$\cos.\frac{IPZ}{2} = \sqrt{\frac{\cos.z \cdot \cos.b + \text{sen.}z \cdot \text{sen.}b - \text{sen.}c}{2 \cdot \cos.z \cdot \cos.b}}$, e $\cos.\frac{LPZ}{2} = \sqrt{\frac{\cos.z \cdot \cos.b + \text{sen.}z \cdot \text{sen.}b}{2 \cdot \cos.z \cdot \cos.b}}$. Alla differenza di questi due angoli è eguale l'angolo $\frac{IPL}{2}$, e per conseguenza si avrà

$$\text{sen.}\frac{IPL}{2} = \frac{\sqrt{\cos.z \cdot \cos.b - \text{sen.}z \cdot \text{sen.}b + \text{sen.}c}\sqrt{\cos.z \cdot \cos.b + \text{sen.}z \cdot \text{sen.}b}}{2 \cdot \cos.z \cdot \cos.b} - \frac{\sqrt{\cos.z \cdot \cos.b + \text{sen.}z \cdot \text{sen.}b - \text{sen.}c}\sqrt{\cos.z \cdot \cos.b - \text{sen.}z \cdot \text{sen.}b}}{2 \cdot \cos.z \cdot \cos.b}.$$

Ed ecco trovata la formola, che dee porsi $= \text{sen.}\frac{15h}{2}$, e insieme avere il suo differenziale $= 0$.

Essendo la formola similmente data per z, e per b è indifferente prendere nel differenziarla per variabile l'una o l'altra di queste due quantità. Fattone il differenziale, e postolo $= 0$, nasce un'equazione, che maneggiata con un po d'arte riesce in ultimo $(\text{sen.}b)^3 - \left(\frac{\text{sen.}z}{\text{sen.}\frac{c}{2} \cdot \cos.\frac{c}{2}} + \frac{\text{sen.}\frac{c}{2} \cdot \cos.\frac{c}{2}}{\text{sen.}z}\right)(\text{sen.}b)^2 +$

$\left(1+(\text{sen.}z)^2\right)\text{sen.}b-\text{sen.}z\,\text{sen.}\frac{c}{2}\,.\,\text{cos.}\frac{c}{2}=0$ dove sen. b ha tre valori, cioè

$$\text{sen.}b=\frac{\text{sen.}z\,.\,\text{sen.}\frac{c}{2}}{\text{cos.}\frac{c}{2}},\quad \text{sen.}\,b=\frac{\text{sen.}\,z\,.\,\text{cos.}\frac{c}{2}}{\text{sen.}\frac{c}{2}},\quad \text{sen.}\,b=\frac{\text{sen.}\frac{c}{2}\,.\,\text{cos.}\frac{c}{2}}{\text{sen.}\,z}.$$

Qui osservisi, che supposto $z=0$, cioè preso il luogo terrestre sotto l'equatore, dee essere anche $b=0$, essendo chiaro, che nella sfera retta il minimo crepuscolo ha luogo que' giorni, ne' quali il sole descrive l'equatore. Ciò posto si conchiude che il terzo valore non appartiene al problema proposto, ma ad un problema analogo. Lo stesso dir si deve del secondo valore; perchè essendo l'arco $\frac{c}{2}$ assai piccolo, il suo seno dev'essere minore del suo coseno, e perciò questo valore porterebbe che anche il seno della latitudine terrestre z fosse sempre minore del seno della declinazione del sole b; il che non può sempre verificarsi.

Al presente problema dunque non serve che il primo valore $\text{sen.}\,b=\frac{\text{sen.}\,z\,.\,\text{sen.}\frac{c}{2}}{\text{cos.}\frac{c}{2}}$, o sia $\text{sen.}\,b=\text{sen.}\,z\,.\,\text{tang.}\frac{c}{2}$. E questo è in fatti il risultato della soluzione sintetica, che il Marchese *De l'Hôpital* ha data del problema, in cui cercasi la declinazione australe del sole, posta la quale la durata del crepuscolo sotto una data latitudine settentrionale terrestre è minima.

Ora liberando l'altra equazione da radicali, e facendo varie riduzioni, e specialmente quella di sostituire $1-(\text{sen.}\,b)^2$ a $(\text{cos.}\,b)^2$ si arriva ad avere

$$\frac{\left(\text{sen.}\frac{15h}{2}\right)^2\left(\text{cos.}\frac{15h}{2}\right)^2-\left(\text{sen.}\frac{c}{2}\right)^2\left(\text{cos.}\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\text{sen.}\frac{15h}{2}\right)^2}=\left(\text{sen.}b\right)^2\left(\text{cos.}\frac{15h}{2}\right)^2+\left(\text{sen.}\,z\right)^2\left(\text{cos.}\frac{15h}{2}\right)^2$$

$$+\left(\text{sen.}\,z\right)^2\left(\text{sen.}\,b\right)^2\left(\text{sen.}\frac{15h}{2}\right)^2-2\,.\,\text{sen.}z\,.\,\text{sen.}b\,.\,\text{sen.}\frac{c}{2}\,.\,\text{cos.}\frac{c}{2},$$

dove si porrà in luogo di sen. b il valore trovato di sopra $\frac{\text{sen.}\,z\,.\,\text{sen.}\frac{c}{2}}{\text{cos.}\frac{c}{2}}$, e nascerà un'equazione, che con opportune riduzioni diventa

$$(\text{sen.}\,z)^4+\frac{\left(\cos.\frac{15h}{2}\right)^2-2\left(\text{sen.}\frac{c}{2}\right)^2\left(\cos.\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\text{sen.}\frac{c}{2}\right)^2\left(\text{sen.}\frac{15h}{2}\right)^2}(\text{sen.}\,z)^2=$$

$$\frac{\left(\cos.\frac{c}{2}\right)^2\left(\text{sen.}\frac{15h}{2}\right)^2\left(\cos.\frac{15h}{2}\right)^2-\left(\text{sen.}\frac{c}{2}\right)^2\left(\cos.\frac{c}{2}\right)^4}{\left(\text{sen.}\frac{c}{2}\right)^2\left(\text{sen.}\frac{15h}{2}\right)^4}$$

Quest' equazione trattata alla maniera delle quadratiche affette conduce mediante alcune riduzioni a due valori di $(\text{sen.}\,z)^2$, che si riducono ad essere

$$(\text{sen.}\,z)^2=\frac{\cos.c-\cos.15h}{1-\cos.15h},\ (\text{sen.}\,z)^2=\frac{\left(\cos.\frac{c}{2}\right)^2\left(-\cos.c-\cos.15h\right)}{2\left(\text{sen.}\frac{c}{2}\right)^2\left(\text{sen.}\frac{15h}{2}\right)^2},$$

il secondo de' quali non può appartenere al nostro problema; poichè posto $15h=c$, il che non può avvenire che ne' punti della terra, che sono sotto l'equatore, dovrebbe riuscir z, e per conseguenza anche $(\text{sen.}\,z)^2=0$, e non già $=-\frac{\left(\cos.\frac{c}{2}\right)^2\cos.c}{\left(\text{sen.}\,z\right)^4}$, come porta quel secondo valore. Il solo primo adunque $(\text{sen.}\,z)^2=\frac{\cos.c-\cos.15h}{1-\cos.15h}$ scioglie il problema proposto. La latitudine per tanto terrestre, che si cercava, è quella, che ha il suo seno $=\sqrt{\frac{\cos.c-\cos.15h}{1-\cos.15h}}$.

Chi volesse la declinazione del Sole il giorno della data minima durata del crepuscolo altro non dovrebbe fare che porre $\sqrt{\frac{\cos.c-\cos.15h}{1-\cos.15h}}$ in luogo di sen. z nel valore già trovato del suo seno $\frac{\text{sen.}\,z\,.\,\text{sen.}\frac{c}{2}}{\cos.\frac{c}{2}}$, o sia sen. z . tang. $\frac{c}{2}$; vale a dire altro non avrebbe a fare che moltiplicare per la tangente della metà dell' arco c il seno della latitudine terrestre, sotto la quale si verifica la data minima durata del crepuscolo. Posto, come usasi, l'arco c di 18°, la tangente della di lui metà è 0.1583844. Se la durata h data del crepuscolo sia, a cagion d'esempio, di ore 1.41'.21", onde si abbia $h=\frac{2027}{1200}$, e $15h=\frac{2027}{80}=$

$25°.20'.15''$, sarà sen.$z = \sqrt{\frac{472538}{961973}} = 0.7008676$, e quindi $z = 44°.29'.48''$, che è vicin vicino la latitudine di Bologna. Sarà poi sen. $b = 0.1583844 \times 0.7008676 = 0.1110065$, e quindi $b = 6°.22'.24''$.

Il caso considerato in questa breve Memoria non è stato, che io sappia, notato da verun Autore; nè forse meritava d'esserlo; nè io ho avuto altro fine nell'avvertirlo, che quello di giovare ai Matematici meno esercitati, persuaso che non possa dar impaccio a chi è già assuefatto ad assoggettar a' suoi calcoli le più intrecciate questioni.

MEMORIA

SOPRA LE SOLUZIONI PARTICOLARI

DELLE EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE

Del Sig. Vincenzo Brunacci

Ricevuta li 27 *Ottobre* 1808.

Come per le equazioni differenziali, così per quelle alle differenze non si può conoscere a fondo la natura dei loro integrali, senza una completa dottrina delle Soluzioni particolari. *La-Grange* ha soddisfatto a questa ricerca per le prime equazioni, ed io procurerò di soddisfarvi in qualche parte per le seconde, non essendomi noto che alcuno siasene quasi (*a*) occupato fin'ora. Questo soggetto lo tratterò in più Memorie, delle quali la presente è la prima.

§. 1. Incomincio dalle equazioni di primo ordine. Sia l'equazione alle differenze $F(x, y, \Delta y) = 0$, ed abbia questa per integrale $\varphi(x, y, a) = 0$, essendo a una costante arbitraria. Si sa che quell'equazione alle differenze può sempre riguardarsi come il risultato dall'eliminazione della costante per mezzo di queste due equazioni

$$(\mathrm{I}) \ldots . \ \varphi(x, y, a) = 0$$
$$(\mathrm{K}) \ldots . \ \varphi(x + 1, y + \Delta y, a) = 0,$$

l'aumento di x essendo 1.

Supponiamo che la a divenga variabile, ma la sua variabilità sia tale, che i termini da essa introdotti si annullino da sè medesimi: allora l'equazione $\varphi(x, y, a) = 0$ continuerà a soddisfare alla differenziale $F(x, y, \Delta y) = 0$, e ne sarà una soluzione particolare. Ecco come potremo trovare quel valore di a.

Nell'Ipotesi assunta della variabilità di a, si ha

$$\varphi(x + 1, y + \Delta y, a + \Delta a) = 0,$$

(*a*) Si veda il Corso di Matematica sublime, Tomo I, pag. 159.

ovvero

$$(1)\ldots.\ \vec{\varphi}(x+1, y+\Delta y, a)+\Delta a\left\{\left(\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial a}\right)+\frac{\Delta a}{2}\cdot\left(\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial a^2}\right)+\text{cc.}\right\}=0$$

nella quale $\vec{\varphi}$ tiene il luogo di $\vec{\varphi}(x+1, y+\Delta y, a)$: Ora acciò i termini introdotti da quella nuova variabile a si annullino, converrà che sia

$$\Delta a\left\{\left(\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial a}\right)+\frac{\Delta a}{2}\left(\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial a^2}\right)+\text{cc.}\right\}=0,$$

ed indicando per P la quantità contenuta tra quelle parentesi, $\Delta a \cdot P=0$. Di qui noi ricaviamo $\Delta a=0$, ovvero $P=0$. La prima di queste due equazioni ci dà per a una costante, quindi si ritrova l'integrale completo d'onde partimmo; la seconda $P=0$ ci darà quella funzione variabile, che sostituire dobbiamo ad a, onde si ottenga la soluzione particolare. L'equazione $P=0$ è alle differenze del primo ordine di a, e può contenere anche y e Δy: si elimineranno però in virtù delle equazioni (I), (K); anzi perchè più facile riesca questa eliminazione, daremo all'integrale completo la forma $y-f(x,a)=0$. L'integrale poi di $P=0$ ci somministrerà per a il ricercato valor variabile, ma ancora questo conterrà una costante arbitraria, e quindi anche la soluzione particolare si troverà fornita di una costante arbitraria, come lo era l'integrale completo, da cui si è dedotta.

L'equazione $P=0$ potrebbe egualmente esser suscettibile di una soluzione particolare, ma per ora io supporrò che ciò non sia, e che quindi la $P=0$ abbia solo un integrale completo.

§. 2. Sia dunque $a=\psi(x, c)$ quest'integrale, ed avremo per la ricercata soluzione particolare

$$(S)\ldots.\ \vec{\varphi}\{x, y, \psi(x, c)\}=0.$$

Noi abbiamo adunque per soddisfare all'equazione alle differenze $F(x, y, \Delta y)=0$, due equazioni

$$(I)\ldots..\ \vec{\varphi}(x, y, a)=0,$$

$$(S)\ldots..\ \vec{\varphi}\{x, y, \psi(x, c)\}=0,$$

ambedue fornite di una costante arbitraria, e tali che la seconda è stata dedotta dalla prima col far variare la costante a che vi si trova.

Ora può dimandarsi se per mezzo della variazione di c,

si

si potrà dedurre dalla seconda equazione (S), operando sopra di essa come fatto abbiamo sulla (I), una terza equazione fornita di costante, che soddisfaccia all'equazione alle differenze, e se da questa terza se ne potrà dedurre una quarta che abbia lo stesso pregio, e dalla quarta una quinta, e così via discorrendo; di modo che si trovino tante equazioni fornite di costanti, che soddisfacciano alla proposta, finchè si giunga ad una, che non ammetta soluzione particolare. Prima di soddisfare ad una tale ricerca, io mi tratterrò a fare un esempio, onde serva di schiarimento a queste dottrine.

§. 3. L'equazione alle differenze $y = x\Delta y - \overline{\Delta y}^2$ ha per integrale completo $y = ax - a^2$. Per ottenerne la soluzione particolare converrà ricavare il valore di a da quest'equazione alle differenze $x + 1 - 2a - \Delta a = 0$, ovvero (scrivendo a_x per a) $a_{x+1} + a_x = x + 1$.

L'integrale di quest'equazione è $a_x = C(-1)^x + \frac{2x+1}{4}$ indicando per C la nuova costante arbitraria. Se ora un tal valore di a si sostituisce nell'integrale completo, avremo la soluzione particolare della proposta, e sarà

$$y = C(-1)^x x + \frac{x(2x+1)}{4} - \left\{C(-1)^x + \frac{2x+1}{4}\right\}^2,$$

ove trovasi la costante arbitraria C.

Questa soluzione particolare si può anche ridurre più semplice, e diviene

$$y = -\frac{C(-1)^x}{2} - C^2 + \frac{(2x+1)(2x-1)}{16}.$$

Da questa soluzione se ne possono ricavare infinite altre col dare alla costante C dei valori particolari, ma costanti; così facendo $C = 0$ si ottiene $y = \frac{4x^2-1}{16}$.

§. 4. Considerata la soluzione particolare dell'esempio precedente come un integrale completo, vediamo se essa ci somministra un'altra soluzione particolare. Prendendo C per variabile, l'equazione, per mezzo della quale dovremo determinarlo, sarà

$$2C + \Delta C = \frac{(-1)^{x+1}}{2}, \text{ ovvero}$$

$$C_{x+1} + C_x = \frac{(-1)^{x+1}}{2}, \text{ e quindi}$$

$C_x = \frac{(-1)^x(A+x)}{2}$ essendo A una nuova costante arbitraria.

Questo valore di C sostituito nella già trovata soluzione particolare ci darà

$$y_x = -\frac{A+x}{4} - \frac{(A+x)^2}{4} + \frac{4x^2-1}{16};$$

e sarebbe questa una terza equazione che soddisferebbe alla differenziale $y = x\Delta y - \overline{\Delta y}^2$; è facile però a vedersi che questa ultima soluzione particolare è lo stesso integrale completo; infatti essa si riduce così

$$y = -\frac{A+x+A^2+2Ax+x^2}{4} + \frac{4x^2-1}{16},$$

$$y = -\frac{4A+4A^2+8Ax+4x-1}{16},$$

$y = -\frac{1+2A}{4}x - \left\{\frac{1+2A}{4}\right\}^2$, e mutando la forma della costante arbitraria, $y = Ex - E^2$, ove la costante E tiene il posto della costante a dell'integrale.

Dall'integrale completo adunque per mezzo della variazione della costante ne abbiamo ritrovata la soluzione particolare, e da questa qui facendo egualmente variare la costante, è di nuovo tornato l'integrale medesimo; così delle due equazioni

$$y = ax - a^2$$

$$y = -\frac{C(-1)^x}{2} - C^2 + \frac{(2x+1)(2x-1)}{16},$$

si può prendere la prima per integrale completo, ed allora la seconda è la soluzione particolare, la quale da esso si deduce; o viceversa prendere quest'ultima per integrale completo, e la prima diventa la soluzione particolare.

Si concluderà poi che due sole equazioni fornite di costante arbitraria soddisfanno all'equazione $y = x\Delta y - \overline{\Delta y}^2$, e che non si può ottenerne altre.

§. 5. Quanto avviene nel caso qui sopra trattato, si verifica eziandio in qualunque equazione alle differenze, ed in questa guisa si risponde alla dimanda del §. 2.

Le due equazioni

$$(I) \ldots\ldots \varphi(x, y, a) = 0,$$

$$(S) \ldots\ldots \varphi\big(x, y, \psi(x, c)\big) = 0,$$

ponno egualmente considerarsi come integrali completi della equazione alle differenze

$$(D) \ldots\ldots F(x, y, \Delta y) = 0,$$

giacchè ambedue contengono una costante arbitraria, e ad essa soddisfanno. Considerate poi una relativamente all'altra si può dimostrare *che presane una per integrale completo, l'altra diventa la soluzione particolare, e viceversa*.

Infatti se nell'equazione (S) presa per integrale completo, si sostituisce invece della costante una quantità variabile, e tale che i termini introdotti dalla di lei variabilità si annullino da sè medesimi (pel che essa continuerà a soddisfare all'equazione alle differenze), diverrà allora questa equazione (S) una soluzione particolare; ma l'equazione (S) può sempre ridursi alla (I) sostituendo invece della costante arbitraria una opportuna funzione di x: dunque soddisfacendo (I) all'equazione alle differenze, egualmente che la (S), ne segue che quest'ultima funzione da sostituirsi in (S) invece della costante, sarà appunto quella, che renderà la (I) una soluzione particolare; *dunque la* (I) *sarà una soluzione particolare, che si deduce dalla* (S), *come questa si deduceva dalla medesima* (I).

§. 6. Questo interessante Teorema si può anche dimostrare in altra guisa.

L'equazione per mezzo della quale si determina il valore di a, onde da (I) si ricavi (S), è

$$\varphi(x+1, y+\Delta y, a+\Delta a) - \varphi(x+1, y+\Delta y, a) = 0$$

ovvero

$$\Delta a \,.\, P = 0.$$

L'equazione alle differenze $P = 0$ ci dia $a = \psi(x, c)$, e la soluzione particolare sarà $\varphi\{x, y, \psi(x, c)\} = 0$.

$\psi(x, c)$ sarà tale, che facendo aumentare x dell'unità, e considerando c costante, come è, l'equazione

$\varphi\big(x+1, y+\Delta y, \psi(x+1, c)\big) = 0$ diviene

$\varphi\{x+1, y+\Delta y, \psi(x, c)\} = 0$ come se ψ fosse stato eguale ad una costante.

Ora consideriamo questa equazione $\varphi\{x, y, \psi(x, c)\} = 0$

come un integrale completo, e per mezzo di esso cerchiamone la soluzione particolare. Si avrà allora, supponendo che la costante c divenga una funzione variabile da determinarsi,

$$\varphi(x+1, y+\Delta y, \psi+\Delta\psi) - \varphi(x+1, y+\Delta y, \psi) = 0,$$

ovvero

$\Delta\psi . P' = 0$, ove P' è fatto di ψ e di $\Delta\psi$, come P era di a e di Δa.

Quest'equazione si decompone nelle due $\Delta\psi = 0$, $P' = 0$; la seconda torna a darci per ψ lo stesso valore, che sopra ricavammo dalla $P = 0$ per a, e quindi si ricade nella stessa equazione dalla quale siamo partiti, cioè $\varphi\{x, y, \psi(x, c)\} = 0$.

La prima ci dà $\psi = A$ costante arbitraria, e si ricade nell'integrale completo $\varphi(x, y, A) = 0$, il quale in conseguenza nasce, come soluzione particolare, da quella soluzione che si ricavò da lui.

§. 7. Con un altro esempio possiamo verificare tutto questo. Sia da integrarsi l'equazione $y = x\Delta y + \sqrt{\Delta y}$.

L'integrale completo di quest'equazione è $y = a^2 x + a$. Per averne la soluzione particolare supporremo a variabile, e dovremo determinarla per mezzo di questa equazione

$$2a + \Delta a = -\frac{1}{x+1}, \text{ ovvero}$$

$$a_{x+1} + a_x = -\frac{1}{x+1}.$$

Si ricava di qui

$$a_x = (-1)^x \left\{ C + \Sigma \frac{(-1)^x}{x+1} \right\}.$$

La soluzione particolare adunque sarà, facendo $\frac{(-1)^x}{x+1} = m_x$,

$$y = \left\{ C^2 + 2C\Sigma m_x + \overline{\Sigma m_x}^2 \right\} x + (-1)^x \left\{ C + \Sigma m_x \right\}.$$

Presa ora questa equazione per integrale completo, se ne cerchi la soluzione particolare, e si avrà per determinare C, l'equazione alle differenze

$$(2C + \Delta C)(x+1) + 2(x+1)\Sigma m_x + \frac{2(x+1)(-1)^x}{x+1} - (-1)^x = 0,$$

$$(2C + \Delta C)(x+1) + 2(x+1)\Sigma m_x + (-1)^x = 0,$$

$$(2C + \Delta C) = -2\Sigma m_x - m_x,$$

$$C_{x+1} + C_x = -\Sigma m_x - \Sigma m_{x+1},$$

e quindi

$$C_x = -\Sigma m_x + A(-1)^x,$$

essendo A un'altra costante arbitraria.

Se questo valore di C si sostituirà nella già trovata soluzione particolare, avremo $y = A^2x + A$, che è lo stesso integrale completo.

§. 8. Nel ricavare dall'integrale completo $\varphi(x, y, a) = 0$ la soluzione particolare, noi abbiamo supposto (§. 1) che l'equazione $P = 0$, la quale ci dà il valore di a, non fosse suscettibile che dell'integrale completo. Supponiamo il caso che essa possa avere anche una soluzione particolare. Rappresentiamo l'equazione $P = 0$ per $f(x, a, \Delta a) = 0$ ed il suo integrale completo per $f'(x, a, c) = 0$ essendo c la costante arbitraria. Per avere la soluzione particolare conviene trovare quella funzione di x da sostituirsi invece di c, e questa funzione dipenderà dall'integrazione di una equazione a differenze finite

$$(C') \ldots\ldots L(x, c, \Delta c) = 0.$$

Quest'ultima equazione non abbia soluzione particolare, e sia il suo integrale completo $L'(x, c, b) = 0$ essendo b una nuova costante arbitraria. Ricaviamo da quest'ultima equazione il valore di c, e sia $c = \Gamma(x, b)$: avremo allora

$$f'(x, a, c) = 0,$$

$$f'\big(x, a, \Gamma(x, b)\big) = 0,$$

che saranno le due equazioni fornite di una costante arbitraria, le quali soddisfanno all'equazione alle differenze $f(x, a, \Delta a) = 0$. Da quelle due equazioni ricaveremo adunque due valori di a, il primo dei quali lo abbiamo indicato per $\psi(x, c)$, ed il secondo indichiamolo per $\psi'(x, b)$.

Quest'ultimo valore sostituito nell'integrale completo $\varphi(x, y, a) = 0$ ci darà un'altra soluzione particolare $\varphi\{x, y, \psi'(x, b)\} = 0$; e così per soddisfare all'equazione alle differenze $F(x, y, \Delta y) = 0$, avremo queste tre equazioni

$$\varphi(x, y, a) = 0,$$

$$\varphi\{x, y, \psi(x, c)\} = 0,$$

$$\varphi\{x, y, \psi'(x, b)\} = 0.$$

Se l'equazione alle differenze (C') ammettesse ancora essa una soluzione particolare, allora si avrebbero due valori va-

variabili per C, quindi tre valori variabili per a, ed in conseguenza quattro equazioni fornite di costante arbitraria, ciascuna delle quali può essere riguardata come l'integrale completo della proposta

$$F(x, y, \Delta y) = 0.$$

Da ciascuno poi di questi quattro integrali si possono dedurre tutti gli altri per mezzo della variazione delle costanti.

Nella medesima guisa si stabilisce quando un'equazione alle differenze del primo ordine può avere cinque integrali completi, e così via discorrendo.

L'equazioni prese per esempj aver non potevano che due sole equazioni fornite di costanti, le quali soddisfacessero all'equazione differenziale.

§. 9. Veniamo a parlare delle equazioni alle differenze del secondo ordine, e dei superiori.

Sia l'equazione del secondo ordine alle differenze

$$F(x, y, \Delta y, \Delta^2 y) = 0, \text{ ed}$$

$(a) \ldots . y = \varphi(x, a, b)$ il suo integrale completo. Se noi prendiamo la differenza prima e la seconda, si avrà

$(b) \ldots . \Delta y = \varphi(x+1, a, b) - \varphi(x, a, b)$;

$(c) \ldots . \Delta^2 y = \varphi(x+2, a, b) - 2\varphi(x+1, a, b) + \varphi(x, a, b)$;

le quali per semplicità scrivo così

$(b) \ldots . \Delta y = \varphi'(x, a, b)$,

$(c) \ldots . \Delta^2 y = \varphi''(x, a, b)$,

e l'equazione alle differenze risulterà dall'eliminazione delle due costanti a, b per mezzo delle tre equazioni (a), (b), (c).

Se poi per mezzo delle due equazioni (a), (b) si elimina a, ovvero b, avremo due equazioni alle differenze del primo ordine

$$P(x, y, \Delta y, a) = 0,$$
$$Q(x, y, \Delta y, b) = 0,$$

cui si dà il nome d'integrali primi completi. Si avverta a scanso d'equivoco, che $P(x, y, \Delta y, a)$ significa qui una funzione delle quantità poste tra le parentesi: lo stesso dicasi di $Q(x, y, \Delta y, b)$. Dall'eliminazione poi di Δy tra i due integrali primi risulta l'integrale completo.

Ora supponiamo che le due costanti a, b divengano variabili, e determiniamole per modo che i termini portati dalla variabilità loro si annullino da sè medesimi. In questa ipotesi avremo

$\Delta y = \phi(x+1, a+\Delta a, b+\Delta b) - \phi(x,a,b) = \phi(x+1,a,b) - \phi(x,a,b) + f(x,a,\Delta a,b,\Delta b)$,
e dovendo annullarsi i termini introdotti da a, b, si avrà

$$(1) \ldots . f(x, a, \Delta a, b, \Delta b) = 0 .$$

In tal guisa il valore di Δy sarà lo stesso come se a, b fossero state costanti.

Prendiamo ora la differenza della trovata differenza prima Δy, e si avrà

$\Delta^2 y = \phi'(x+1, a+\Delta a, b+\Delta b) - \phi'(x,a,b) = \phi'(x+1,a,b) - \phi'(x,a,b) + f'(x,a,\Delta a,b,\Delta b)$:

Onde poi la variabilità di a, b non alteri il valore di $\Delta^2 y$ dovrà essere

$$(2) \ldots . f'(x, a, \Delta a, b, \Delta b) = 0 .$$

Alle equazioni (1), (2) noi possiamo dare queste forme

$$(1) \ldots . \Delta a \, . V + \Delta b \, . W = 0 ,$$
$$(2) \ldots . \Delta a \, . V' + \Delta b \, . W' = 0 ;$$

nelle quali V, W, V', W' sono funzioni di x, a, Δa, b, Δb.

§. 10. Determinati i valori di a, e di b per mezzo di queste due equazioni, si avrà (indicando per a_x, b_x questi valori)

$$(a) \ldots . y = \vec{\varphi}(x, a_x, b_x) ,$$

e questa sarà la soluzione particolare della equazione proposta, imperciocchè avendo le funzioni a_x, b_x la proprietà di introdurre, nelle differenze, termini, che da sè stessi si distruggono, si ha egualmente

$$(b) \ldots . \Delta y = \vec{\varphi}'(x, a_x, b_x) ,$$
$$(c) \ldots . \Delta^2 y = \vec{\varphi}''(x, a_x, b_x) ,$$

e quindi con l'eliminazione di a_x, b_x per mezzo delle tre equazioni (a), (b), (c), si ha la stessa equazione alle differenze finite $F(x, y, \Delta y, \Delta^2 y) = 0$. Soddisfarà dunque a questa equazione $y = \vec{\varphi}(x, a_x, b_x)$, il quale, non risultando da qualunque valore particolare, che si dia alle costanti a, b, dell'integrale completo $y = \vec{\varphi}(x, a, b)$, si chiama in conseguenza soluzione particolare.

I due integrali primi

$$P(x, y, \Delta y, a) = 0$$
$$Q(x, y, \Delta y, b) = 0$$

indicati al §. antec., divengono per le stesse ragioni due soluzioni particolari, quando si pongano in esse invece di a, b le ritrovate funzioni a_x, b_x. Saranno adunque queste due soluzioni particolari

$$(3) \ldots . P(x, y, \Delta y, a_x) = 0 ,$$

$$(4) \ldots\ldots Q(x, y, \Delta y, b_x) = 0.$$

Anzi rapporto a queste soluzioni particolari si può dimostrare, che sono in sostanza una sola, non differendo le due equazioni che nella forma.

Infatti per avere la soluzione particolare (3) bisogna incominciare da eliminare b tra le due equazioni

$$y = \varphi(x, a, b),$$
$$\Delta y = \varphi'(x, a, b),$$

e quindi dal risultato

$$P(x, y, \Delta y, a) = 0$$

eliminare a per mezzo delle altre due equazioni (1), (2); di modo che quella soluzione particolare è il risultato della eliminazione di a, b per mezzo delle quattro equazioni

$$(a), (b), (1), (2).$$

Se eliminiamo poi la costante a per mezzo delle suindicate equazioni (a), (b), e dal risultato $Q(x, y, \Delta y, b) = 0$ si elimina b con l'ajuto delle due altre equazioni (1), (2), si avrà l'altra soluzione (4); anche questa pertanto sarà il risultato della eliminazione di a, b per mezzo delle quattro equazioni (a), (b), (1), (2): dunque le due soluzioni particolari si ridurranno ad una sola.

§. 11. Al §. 9 abbiamo detto che una equazione del secondo ordine alle differenze, ha (giusta la comune maniera di considerare gli integrali) due integrali completi del primo ordine, e questi abbiamo rappresentati per

$$P(x, y, \Delta y, a) = 0, \quad \text{ovvero} \quad P = 0,$$
$$Q(x, y, \Delta y, a) = 0, \qquad\qquad Q = 0.$$

Ora io osservo che questi due integrali ponno riguardarsi, uno come la soluzione particolare ricavata dall'altro col far variabile la costante che in questo si trova. Infatti si osserverà qui come al §. 5, che si può sempre prendere per a una tale funzione di x, y, Δy, che renda $P = Q$, di modo che, indicando per M questo valore, sia

$$P(x, y, \Delta y, M) = Q(x, y, \Delta y, b).$$

Ora questo valore di a non essendo una quantità costante non può darci un integrale particolare; ma una soluzione particolare, se sostituito in $P = 0$ continuerà quest'equazione a soddisfare alla proposta equazione alle differenze, come avviene infatti, giacchè allora $P = Q$.

Da

Da siffatta osservazione si ricava anche un'altra dimostrazione del Teorema dimostrato al §. 10, cioè

Se dall'integrale primo completo $P=0$ *si ricava la soluzione particolare del primo ordine, e sia* $R=0$, *se una simile soluzione particolare si ricava dall'altro integrale primo* $Q=0$, *e sia* $S=0$, *queste due soluzioni saranno la stessa cosa.*

Supponiamo infatti che la costante a dell'integrale primo sia variabile, e che x cresca della sua differenza finita 1, e si avrà

$$P(x+1, y+\Delta y, \Delta y+\Delta^2 y, a+\Delta a)=0,$$

cui si può dare la forma

$$P(x+1, y+\Delta y, \Delta y+\Delta^2 y, a)+\Delta a \,.\, V=0,$$

indicando per $\Delta a \,.\, V$ la somma dei termini portati da a. Se si fa $V=0$, o per denotare che V contiene a, $V(a)=0$, sarà questa l'equazione, che determinar debbe a, e la soluzione particolare $R=0$ sarà il risultato della eliminazione di a tra le due equazioni $P=0$, $V(a)=0$.

Lo stesso si dica per la soluzione particolare $S=0$, che ricavar si debbe da $Q=0$. Sarà essa il risultato della eliminazione di b tra $Q=0$, ed un'altra equazione $V'=0$, ovvero $V'(b)=0$.

Ora poniamo in $P(x, y, \Delta y, a)=0$ in scambio di a quel valore M, il quale rende $P(x, y, \Delta y, M)=Q(x, y, \Delta y, b)$: è manifesto che in quest'ipotesi avremo lo stesso risultato eliminando b tra $Q=0$, $V'(b)=0$, che si avrà eliminando M tra $P(x, y, \Delta y, M)=0$, $V(M)=0$, giacchè il b è solo contenuto in M; ma quest'ultimo risultato è lo stesso che quello dell'eliminazione di a tra $P(x, y, \Delta y, a)=0$, $V(a)=0$; dunque il risultato dell'eliminazione di a tra queste due ultime equazioni, cioè la soluzione particolare, la quale ci è data da $P=0$, sarà lo stesso che il risultato dell'eliminazione di b tra $Q=0$, $V'(b)=0$, cioè sarà l'altra soluzione particolare del primo ordine dataci da $Q=0$.

§. 12. Riprendiamo le due equazioni del §. 9,

$$(1) \ldots\ldots \Delta a \,.\, V+\Delta b \,.\, W=0$$
$$(2) \ldots\ldots \Delta a \,.\, V'+\Delta b \,.\, W'=0,$$

le quali ci debbono dare i valori di a, b in funzioni di x, da sostituirsi nell'integrale completo $y=\varphi(x, a, b)$, onde si abbia la soluzione particolare che

vi corrisponde; e da sostituirsi in uno degli integrali primi completi

$$P(x, y, \Delta y, a) = 0,$$
$$Q(x, y, \Delta y, b) = 0,$$

onde abbiasi la soluzione particolare prima.

Primieramente osservo che facendo $\Delta a = 0$, $\Delta b = 0$, le due equazioni sono soddisfatte, e per a, b si hanno due costanti, e quindi si ricade negli integrali completi d'onde siamo partiti. Non facendo adunque queste supposizioni considero che le due equazioni (1), (2) sono alle differenze finite del primo ordine tra due funzioni variabili incognite a_x, b_x, e che perciò (Corso di Mat. Sub. Tom. I, §. 71) il valore di queste funzioni dipenderà dall'integrazione di una equazione a differenze finite del secondo ordine. Supponiamo che quest'equazione non ammetta soluzioni particolari, ma soltanto un integrale completo. Questo integrale completo conterrà due nuove costanti arbitrarie, quindi i valori di a_x, b_x conterranno ancora essi queste due costanti. Sia pertanto $a_x = \psi(x, c, e)$, $b_x = \psi'(x, c, e)$ essendo e, c quelle costanti, e sarà $y = \varphi(x, \psi, \psi')$ la soluzione particolare corrispondente all'integrale completo, e $P(x, y, \Delta y, \psi) = 0$, ovvero $Q(x, y, \Delta y, \psi') = 0$ la soluzione particolare del primo ordine.

Così la soluzione particolare corrispondente all'integrale completo, contiene, come esso, due costanti arbitrarie; e due costanti arbitrarie contiene anche la soluzione particolare prima, a differenza degli integrali primi, i quali non ne contengono che una sola ciascuno.

§. 13. Prendiamo a farne un esempio: Presa l'equazione $y = ax + \frac{bx^2}{2} + a^2 + b^2$ per un integrale completo, si ha $\Delta y = a + \frac{b(2x+1)}{2}$, $\Delta^2 y = b$, quindi sarà

$$y = x\Delta y - \frac{x^2\Delta^2 y}{2} - \frac{x\Delta^2 y}{2} + \overline{\Delta y}^2 - \Delta y \cdot \Delta^2 y \cdot (2x+1) + x^2\overline{\Delta^2 y}^2 + x\overline{\Delta^2 y}^2 + \frac{5\Delta^2 y^2}{4}$$

l'equazione alle differenze del secondo ordine di quell'integrale.

I due integrali primi saranno

$$y = x\left\{\Delta y - \frac{b(2x+1)}{2}\right\} + \frac{bx^2}{2} + b^2 + \left\{\Delta y - \frac{b(2x+1)}{2}\right\}^2,$$

$$y = ax + \frac{x^2}{2}\left\{\frac{2\Delta y - 2a}{2x+1}\right\} + \left\{\frac{2\Delta y - 2a}{2x+1}\right\}^2 + a^2 .$$

Ora per avere le soluzioni particolari si riguardino a, b come variabili, e le equazioni (1), (2), diverranno

$$(1) \ldots . \Delta a(x+1) + \frac{\Delta b(x+1)^2}{2} + 2a\Delta a + \overline{\Delta a}^2 + 2b\Delta b + \Delta b^2 = 0 ,$$

$$(2) \ldots . \Delta a + \frac{\Delta b(2x+3)}{2} = 0 ;$$

così la soluzione particolare corrispondente all'integrale completo, si avrà sostituendo in esso per a, b i loro valori dati dalle equazioni (1), (2).

Sostituendo nell'equazione (1) il valore di Δa dato dall'equazione (2), e dividendo per Δb, si ha

$$-\frac{(2x+3)(x+1)}{2} + \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{2a(2x+3)}{2} + \frac{\Delta b(2x+3)^2}{4} + 2b + \Delta b = 0 ,$$

ovvero

$$(3) \ldots . -\frac{(x+1)(x+2)}{2} - (2x+3)a + \frac{(2x+3)^2}{4}\Delta b + 2b + \Delta b = 0 .$$

In questa equazione facciamo aumentare x dell'unità ed avremo

$$-\frac{(x+2)(x+3)}{2} - (2x+5)(a+\Delta a) + \frac{(2x+5)^2}{4}(\Delta b + \Delta^2 b) + 2(b+\Delta b) + \Delta b + \Delta^2 b = 0 ,$$

nella quale, sostituendo per Δa il valore datoci dalla equazione (2), si ha

$$(4) \ldots . -\frac{(x+2)(x+3)}{2} - (2x+5)a + \frac{(2x+5)(2x+3)}{2}\Delta b + \frac{(2x+5)^2}{4}(\Delta b + \Delta^2 b) + 2b + 3\Delta b + \Delta^2 b = 0 .$$

Per mezzo delle due equazioni (3), (4) si può eliminare a, ed ottenere un'equazione alle differenze del secondo ordine, la quale abbia questa forma

$$M\Delta^2 b + N\Delta b + Lb + H = 0 ,$$

essendo i coefficienti M, N, L, H tante funzioni date di x.

Ad una tale equazione si può dare anche la forma

$$(5) \ldots . b_{x+2} + \alpha b_{x+1} + \beta b_x = X$$

essendo α, β, X funzioni cognite di x.

L'equazione (5) è integrabile completamente (Opera citata, §. 49) e non ammette soluzione particolare.

Da questo integrale completo si ricaverà il valore di b_x, il quale sostituito nell'equazione (4) ci darà quello di a_x.

Ciascuno di questi valori conterrà poi le due costanti arbitrarie, che porta l'integrazione dell'equazione (5).

Io non eseguisco tutti questi calcoli, perchè si complicano in tal guisa, che a me non sembra che metta conto condurli a fine.

§. 14. Ritornando alle dottrine sviluppate nel §. 12, io osservo che l'integrale completo $y = \varphi(x, a, b)$ ci ha data la soluzione particolare

$y = \varphi\{x, \psi(x, c, e), \psi'(x, c, e)\}$, la quale contenendo due costanti arbitrarie può essere presa per l'integrale completo della proposta. Considerando poi quest'ultima espressione di y come l'integrale completo, si può dimostrare, come per l'equazioni del primo ordine, questo interessantissimo ed elegante Teorema *che la soluzione particolare da esso somministrataci per mezzo della variazione delle costanti, è lo stesso primiero integrale completo, quando l'equazione alle differenze che determina le costanti* a, b *divenute variabili, non abbia soluzioni particolari*.

Infatti supponiamo che in

$$y = \varphi\{x, \psi(x, c, e), \psi'(x, c, e)\}$$

le costanti c, e siano variabili, ed i termini che dovranno annullarsi in virtù di queste variabilità saranno

$$\Delta\psi \cdot V + \Delta\psi' \cdot W = 0$$
$$\Delta\psi \cdot V' + \Delta\psi' \cdot W' = 0,$$

ove V, V', W, W' sono fatti di ψ, ψ' come al §. 12 erano di a, b.

Ora facendo $\Delta\psi = 0$, $\Delta\psi' = 0$, si trova $\psi = a$, $\psi' = b$, quindi si ottiene per soluzione particolare $y = \varphi(x, a, b)$. Se poi queste supposizioni non si fanno, allora per ψ, ψ' si ottengono gli stessi valori, che si ebbero per a, b, quindi si ricade nella stessa equazione

$y = \varphi\{x, \psi(x, c, e), \psi'(x, c, e)\}$, d'onde partimmo.

Così delle due equazioni

$$y = \varphi(x, a, b)$$
$$y = \varphi\{x, \psi(x, c, e), \psi'(x, c, e)\}$$

qualunque di esse si prenda per l'integrale completo, l'altra

ne diventa la soluzione particolare, o deriva dalla prima facendo variare le costanti.

Quando l'equazione risultante da quelle due (1), (2) del citato §. ammettesse soluzione particolare, allora *si potrebbe ottenere un' altra soluzione particolare della proposta equazione alle differenze, completata anche questa con due costanti arbitrarie, a motivo delle quali essa anche potrebbe prendersi per l'integrale completo*. Insomma si possono qui dimostrare delle proprietà simili a quelle, che abbiamo dimostrate ai (§§. 5, 6, 8) per gli integrali delle equazioni alle differenze del primo ordine.

§. 15. Quanto alle equazioni degli ordini superiori, si può per la stessa via procedere a stabilire la dottrina delle soluzioni particolari, e niuna difficoltà può incontrarsi nel dimostrare i Teoremi, i quali contengono i rapporti tra le soluzioni e gl'integrali.

Io lascio, a chi il voglia, il rendere generale questa dottrina che detti pell'equazioni di primo e secondo ordine, e passo alla considerazione delle soluzioni particolari nelle equazioni a differenze finite e parziali.

§. 16. In questa sorte di equazioni la dottrina delle soluzioni particolari si complica oltre modo, non perchè non bastino le considerazioni stabilite superiormente per fondarla, ma perchè i calcoli divengono lunghi e tediosi, e perchè essa dipende dall'integrazione di equazioni, che non si sanno per anche integrare: così nello stato attuale della matematica tutto quel che può farsi si è l'indicare le tracce da seguirsi, in siffatta ricerca.

Prendiamo l'equazione

$z = \varphi(x, y, a, b)$, ovvero

(1) . . . . $z_{x,y} = \varphi(x, y, a, b)$, essendo a, b due costanti. Da questa si ricava

(2) . . . . $z_{x+1,y} = \varphi(x+1, y, a, b)$

(3) . . . . $z_{x,y+1} = \varphi(x, y+1, a, b)$

ed eliminando le due costanti per mezzo di queste tre equazioni si ottiene

(4) . . . . $F(x, y, z_{x,y+1}, z_{x+1,y}) = 0$

equazione alle differenze parziali del primo ordine, della quale l'equazione (1) è l'integrale completo.

Ora l'equazione (1) continuerebbe ancora a soddisfare all'

equazione (4) se a, b fossero variabili, ma tali che i termini da essi introdotti si annullassero da sè medesimi, cioè a dire che non ostante la di loro variabilità si continuassero ad avere per $z_{x+1,y}, z_{x,y+1}$ le stesse espressioni. Allora l'equazione (1) sarebbe una soluzione particolare.

Vediamo come introducendo nel calcolo questa condizione si possono determinare a, b, le quali essendo variabili scriveremo per $a_{x,y}, b_{x,y}$.

In questa supposizione dall'equazione

$$z_{x,y} = \varphi(x, y, a_{x,y}, b_{x,y})$$

si deduce

$$z_{x+1,y} = \varphi(x+1, y, a_{x+1,y}, b_{x+1,y}),$$
$$z_{x,y+1} = \varphi(x, y+1, a_{x,y+1}, b_{x,y+1}),$$

avremo adunque per determinare $a_{x,y}, b_{x,y}$ queste due equazioni a differenze finite e parziali

$$(5) \ldots . \varphi(x+1, y, a_{x+1,y}, b_{x+1,y}) = \varphi(x+1, y, a_{x,y}, b_{x,y}),$$
$$(6) \ldots . \varphi(x, y+1, a_{x,y+1}, b_{x,y+1}) = \varphi(x, y+1, a_{x,y}, b_{x,y}).$$

Da queste equazioni conviene dedurne una, che contenga una sola delle due funzioni incognite a, b, e sarà questa un'equazione a differenze parziali.

Dalle due equazioni (5), (6) si può eliminare $a_{x,y}$ e si avrà un'altra equazione.

$$(7) \ldots . F'(x, y, a_{x+1,y}, a_{x,y+1}, b_{x,y}, b_{x+1,y}, b_{x,y+1}) = 0.$$

Facendo nell'equazione (5) crescere la y di una unità, e nella (6) facendo aumentare la x, i due primi membri vengono eguali, e l'eguaglianza dei secondi ci dà

$$(8) \ldots . \varphi(x+1, y+1, a_{x,y+1}, b_{x,y+1}) = \varphi(x+1, y+1, a_{x+1,y}, b_{x+1,y}).$$

Per mezzo delle equazioni (7), (8) si troveranno i valori di $a_{x,y+1}, a_{x+1,y}$ espressi come segue

$$(9) \ldots . a_{x,y+1} = \psi(x, y, b_{x,y}, b_{x+1,y}, b_{x,y+1}),$$
$$(10) \ldots . a_{x+1,y} = \psi'(x, y, b_{x,y}, b_{x+1,y}, b_{x,y+1}).$$

Ora facendo aumentare x di una unità nell'equazione (9), ed y nella (10), si ricaverà da esse una equazione di questa forma

$$(11) \ldots . f(x, y, b_{x+1,y}, b_{x,y+1}, b_{x+1,y+1}, b_{x+2,y}, b_{x,y+2}) = 0$$

dall'integrale della quale equazione dipende il valore di $b_{x,y}$ e di $a_{x,y}$.

§. 17. L'equazione semplicissima

$$z_{x,y} = ax + by + ab,$$ ci dà subito

$$z_{x+1,y} = a(x+1) + by + ab,$$

$$z_{x,y+1} = ax + b(y+1) + ab,$$

essendo a, b costanti, quindi

$$z_{x,y} = (z_{x+1,y} - z_{x,y})x + (z_{x,y+1} - z_{x,y})y + (z_{x+1,y} - z_{x,y})(z_{x,y+1} - z_{x,y})$$

sarà l'equazione alle differenze parziali, che ha per integrale completo la proposta.

La soluzione poi particolare si avrà se trovar potremo due funzioni per a, b che soddisfacciano a queste equazioni

$$a_{x+1,y}(x+1) + b_{x+1,y}.y + a_{x+1,y}.b_{x+1,y} = a_{x,y}.(x+1) + b_{x,y}.y + a_{x,y}.b_{x,y};$$

$$a_{x,y+1}.x + b_{x,y+1}(y+1) + a_{x,y+1}.b_{x,y+1} = a_{x,y}.x + b_{x,y}(y+1) + a_{x,y}.b_{x,y}.$$

Si vede sino di qui come si complica il calcolo, e che anche in questo semplicissimo caso si giungerebbe ad una equazione che supera le forze attuali dell'Analisi.

N O T E

Al §. 1.

Le due equazioni (I), (K) si possono combinare in infiniti modi, ed ognuna di queste combinazioni ci darà una equazione alle differenze finite del primo ordine, della quale $\phi(x, y, a) = 0$ sarà l'integrale. Le eliminazioni poi, sia di una quantità costante come di una quantità variabile, sono alcune di quelle infinite combinazioni.

Proposta dunque una equazione alle differenze del primo ordine, può questa non esser nata dalla eliminazione di una costante arbitraria, ma da qualunque altra combinazione: ora avendo noi asserito in questo §. che *una tale equazione può sempre riguardarsi come il risultato dell' eliminazione della costante* sembrerà a taluno che questa proposizione, in virtù delle considerazioni fatte qui sopra, sia falsa, o per il meno inesatta.

Eccomi per questo a dimostrarla: In qualunque modo sia nata una equazione alle differenze del primo ordine, per effettivamente integrarla occorre l'integrazione di formole alle differenze prime, la quale porta di sua natura una costante arbitraria; così l'equazione integrale conterrà questa costante arbitraria che non si trovava nell'equazione alle differenze.

Se poi per mezzo di quest'equazione integrale, fornita di costante arbitraria, e della di lei differenza finita, si elimina la costante, si otterrà un'equazione alle differenze prime, la quale sarà sempre riducibile alla proposta, e ne sarà la medesima cosa, per il che concluderemo che anche la proposta si potrà sempre considerare dedotta dall'eliminazione di una costante, tra l'integrale completo, e la sua differenza finita, per quanto non lo sia stata.

Infatti sia $F(x, y, \Delta y) = 0$ l'equazione alle differenze: sia $\phi = 0$ il suo integrale fornito di una costante arbitraria, e dovendo questo soddisfare all'equazione alle differenze, sarà necessariamente
$F(x, y, \Delta y) = f(\phi, \phi')$ indicando per $\phi' = 0$ l'equazione $\phi = 0$ quando x vi cresce della sua differenza finita. La proposta adunque sarà $f(\phi, \phi') = 0$. Ora a questa equazione si riduce qualunque altra equazione fatta con le due $\phi = 0$, $\phi' = 0$, sia eliminandone la costante, sia combinandole in qualunque modo tra loro: imperciocchè

ciocchè ponendo, che questa nuova combinazione s'indichi per $\psi(\phi,\phi')=0$, sarà sempre

$$\psi(\phi,\phi')=f(\phi,\phi')+\Gamma(\phi,\phi');$$

e siccome $\Gamma(\phi,\phi')=0$ da sè medesima così $\psi(\phi,\phi')=0$ sarà la stessa cosa che $f(\phi,\phi')=0$, ed una di queste si potrà sempre ridurre all'altra con l'aggiunta di $\Gamma(\phi,\phi')=0$.

Si avverta che i segni ϕ,ψ,f,Γ esprimono funzioni delle quantità, che si trovano tra le parentesi accanto a loro.

Riguardo alle combinazioni, che ponno farsi con le due equazioni

$$(I)\ \ldots\ \phi(x,y,a)=0$$

$$(K)\ \ldots\ \phi(x+1,y+\Delta y,a)=0=\phi'$$

si può dimostrare questo Teorema: *Se per mezzo di una qualunque combinazione di quelle due equazioni si ottiene un' equazione alle differenze prime*

$$P(x,y,\Delta y)=0.$$

Se per mezzo di un' altra combinazione diversa, si ottiene un' altra equazione

$$Q(x,y,\Delta y)=0,$$

eliminando tra queste due equazioni il Δy, *si ottiene una equazione, che è la stessa* $\phi=0$, *o a quella si riduce.*

Infatti indicando quelle due combinazioni per $f(\phi,\phi')=0$, $\psi(\phi,\phi')=0$, per eliminarvi il Δy serve eliminare tra queste due il ϕ', che la contiene, e si avrà allora un'equazione di questa forma $\Gamma\phi=0$, la quale si riduce a $\phi=0$.

Queste considerazioni e questo Teorema da noi dato per le equazioni a differenze finite, hanno luogo parola a parola per l'equazioni differenziali.

Verifichiamo con un esempio questo ultimo Teorema.

Sia l'equazione $y=ax^2+a^2$, e questa ci darà $\Delta y=a(2x+1)$. Eliminando a tra queste due equazioni si otterrà

$$(1)\ \ldots\ y(2x+1)^2=x^2\Delta y(2x+1)+\Delta y^2.$$

Se tra quelle stesse equazioni eliminiamo x si avrà un'altra equazione alle differenze del primo ordine,

$$(2)\ \ldots\ 4ya=(\Delta y-a)^2+4a^3.$$

Ora eliminiamo Δy per mezzo delle due equazioni (1), (2). Sottraendo l'equazione (2) dalla (1) si ha

$$(3)\ \ldots\ y(2x+1)^2-4ya+a^2+4a^3=\left\{(2x+1)x^2+2a\right\}\Delta y.$$

Ricavato da quest'ultima equazione il valore di Δy, e sostituito nella (2) si ha un' equazione senza le differenze finite

$$\left\{y(2x+1)^2-4ya-a^2-4a^3-ax^2(2x+1)\right\}^2=4a(y-a^2)\left\{(2x+1)x^2+2a\right\}^2,$$

la quale ci dà per y,

$y = ax^2 + a^2$, che è lo stesso integrale d'onde siamo partiti.

Al §. 9.

La dottrina esposta al principio di questo §. è conforme a quella che si ha sopra gli integrali delle equazioni differenziali degli ordini superiori. Per essa hanno luogo le medesime considerazioni che noi abbiamo fatte nella nota precedente per le equazioni del primo ordine.

Se per $\phi' = 0$, $\phi'' = 0$ si rappresentano la differenza prima e seconda dell'equazione

$\phi(x, y, a, b) = 0$, combinando queste tre equazioni si può in infiniti modi dedurre una equazione alle differenze del secondo ordine, e tra queste infinite combinazioni vi è pur quella dell'eliminazione delle due costanti a, b. Ma si possono anche eliminare due qualunque quantità, che siano comuni a quelle tre equazioni. Non ostante tutto questo siccome ordinariamente nell'integrare quelle equazioni alle differenze, avviene di dover prendere gli integrali finiti delle formole di secondo ordine, così queste introducono di sua natura due costanti arbitrarie nell'integrale dell'equazione alle differenze del secondo ordine medesimo.

Dall'eliminazione di quelle due costanti risulterà una equazione alle differenze del secondo ordine, la quale si potrà sempre ridurre ad avere la forma dell'equazione proposta: ciò si dimostra nella stessa guisa che noi abbiamo fatto per l'equazioni alle differenze del primo ordine. E per questo legittimamente si può dire: che un'equazione del secondo ordine può sempre considerarsi come il risultato dell'eliminazione di due costanti arbitrarie dall'integrale completo.

L'equazione alle differenze seconde, che si ricava da una qualunque combinazione $F(\phi, \phi', \phi'') = 0$ delle tre equazioni $\phi = 0$, $\phi' = 0$, $\phi'' = 0$, si può sempre ridurre ad un'altra equazione alle stesse differenze, la quale si deduca da una combinazione qualunque $f(\phi, \phi') = 0$ delle due $\phi = 0$, $\phi' = 0$, e dalla differenza finita della stessa $f(\phi, \phi') = 0$. Infatti quest'ultima equazione ci dà

$f(\phi + \Delta\phi, \phi' + \Delta\phi') = 0$, ovvero

$f(\phi + \phi', \phi' + \phi'') = 0$;

quindi una combinazione qualunque di

$f(\phi, \phi') = 0$, e di

$f(\phi + \phi', \phi' + \phi'') = 0$

sarà una funzione di ϕ, ϕ', ϕ'', che indicheremo per $\psi(\phi, \phi', \phi'') = 0$.

Ora $F(\phi, \phi', \phi'') = 0$ si può sempre ridurre a $\psi(\phi, \phi', \phi'') = 0$, poichè sarà sempre

$\Gamma(\phi, \phi', \phi'') = \psi(\phi, \phi', \phi'') + \Gamma(\phi, \phi', \phi'')$,

ove $\Gamma(\phi, \phi', \phi'') = 0$, perchè questa è anche un'equazione che nasce da una combinazione di $\phi = 0$, $\phi' = 0$, $\phi'' = 0$.

Avvertiamo che queste combinazioni delle quantità ϕ, ϕ', ϕ'', debbono sempre esser tali, che si annullino col fare $\phi = 0$.

Dalle considerazioni poi fatte qui sopra concluderemo *che dalle due equazioni* $\phi = 0$, $\phi' = 0$ *possiamo ricavare un numero infinito di equazioni alle differenze del primo ordine; che da ciascuna di queste equazioni e dalla sua differenza si possono ricavare infinite equazioni di secondo ordine; e che infine ognuna di queste equazioni di secondo ordine si può riguardare come ottenuta direttamente dalla combinazione delle tre* $\phi = 0$, $\phi' = 0$, $\phi'' = 0$.

Da ciò che si è detto poi nella nota precedente risulta, che da due qualunque di quelle infinite equazioni alle differenze prime, ciascuna delle quali può riguardarsi come un integrale primo dell'equazione alle differenze seconde, si può ricavare l'integrale completo $\phi = 0$, per mezzo dell'eliminazione di Δy, o ricavare una equazione che sia una funzione di questa, e che perciò ad essa possa sempre ridursi.

L'integrale poi di ciascuno di questi integrali primi, sarà lo stesso integrale finito della proposta alle differenze seconde. Infatti sia $\theta = 0$ l'integrale di un integrale primo $f(\phi, \phi') = 0$: si avrà (posto $\theta' = \Delta\theta$),
$f(\phi, \phi') = \Gamma(\theta, \theta')$; dunque $\theta = 0$ soddisfarà a $f(\phi, \phi') = 0$; ma vi soddisfa $\phi = 0$, dunque θ sarà funzione di ϕ, dunque dall'equazione $\theta = 0$ si ricaverà sempre $\phi = 0$.

Avverto anche qui che questi ragionamenti e dimostrazioni sono applicabili intieramente agli integrali delle equazioni differenziali; anzi da queste si ricava in qual senso, ed in quale estensione debba prendersi il Teorema di *Fontaine* sopra la moltiplicità degli integrali delle equazioni differenziali degli ordini superiori.

Al §. 11.

Simili considerazioni possono farsi per le soluzioni particolari delle equazioni differenziali.

Sia infatti una equazione differenziale del secondo ordine

$$F\left\{x, y, \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right), \left(\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}\right)\right\} = 0:$$

Essa ha due integrali primi $P = 0$, $Q = 0$ ciascuno dei quali contiene una costante arbitraria. Sia a la costante contenuta in $P = 0$; b quella contenuta in $Q = 0$.

Ora io dico che questi due integrali saranno tali, che uno si ricaverà dall'altro; purchè si prenda per variabile la costante che in questo si trova; di modo che preso uno di questi integrali per l'integrale primo completo, l'altro ne diventa la soluzione particolare.

Siano infatti

$$P\left(x, y, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right), a\right) = 0$$

$$Q\left(x, y, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right), b\right) = 0$$

i due integrali primi, e si prenda per a una tal funzione di x, y, $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$, b, che renda la prima equazione identica con la seconda: è evidente che un tal valore di a non essendo costante, non può rappresentarci un integrale particolare primo, e che continuando l'equazione $P = 0$ a soddisfare alla proposta, ne sarà una soluzione particolare: si osservi che questa soluzione particolare contiene una costante arbitraria.

Questa relazione tra $P = 0$, $Q = 0$ serve a dimostrare il seguente Teorema in un modo più facile di quello usato da *La-Grange*, e da me riferito (Tom. IV, pag. 4, del mio Corso).

Se dall' equazioni $P = 0$, $\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right) = 0$ *si elimina* a *per avere una soluzione particolare* $R = 0$; *se dall' equazioni* $Q = 0$, $\left(\frac{\partial Q}{\partial b}\right) = 0$ *con l'eliminazione di* b *si ricava un' altra soluzione particolare* $S = 0$, *le due soluzioni* $S = 0$, $R = 0$ *saranno la stessa cosa*.

Infatti sia M quel valore variabile di a, il quale rende

$$P\left\{x, y, \mathrm{M}, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right\} = Q\left\{x, y, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right), b\right\}.$$

Il risultato della eliminazione di M tra $P = 0$, $\left(\frac{\partial P}{\partial \mathrm{M}}\right) = 0$, sarà lo stesso che il risultato dell'eliminazione di b tra l'equazioni $Q = 0$, $\left(\frac{\partial Q}{\partial b}\right) = 0$, poichè b è contenuto in M: ma il risultato dell'eliminazione di M è lo stesso che quello dell'eliminazione di a, dunque anche quest'ultimo risultato dell'eliminazione di a tra $P = 0$, e $\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right) = 0$, sarà lo stesso che il risultato dell'eliminazione di b tra $Q = 0$, e $\left(\frac{\partial Q}{\partial b}\right) = 0$; dunque $S = R$ come dovea dimostrarsi.

OPPOSIZIONI DI SATURNO

OSSERVATE

Dal Sig. Abate Vincenzo Chiminello.

Ricevute li 30 *Ottobre* 1808.

1789.	Appulsi al Murale					Differenze di Decl. dal lembo superiore.
11 Settembre	♃ ≈	11ʰ	41′	57″,4	t. v.	0° 59′ 15″,2 Bor.
	Lembo ♄	12	4	55	,6	
12	♃ ≈	11	38	22	,1	0 57 14 ,1 —
	L. ♄	12	1	4	,4	
13	♃ ≈	11	34	44	,1	0 55 31 ,0 —
	L. ♄	11	57	11	,6	

A. R. di ♃ per il Catal. *De la Caille* rid. all'app. 345° 51′ 49″,2

Declinazione 7 10 25 ,2 A.

Semid. di ♄ appar. 20 ,9

Quindi le A. R. di ♄	351°	37′	36″,7	Decl.	6°	11′ 20″,6 A.
		33	36 ,0			13 21 ,7
		29	53 ,4			15 4 ,8
le Longit.	11′	19°	52′	18″,6	le lat.	2° 21′ 47″,5 A.
			47	51 ,1		22 2 ,2
			43	47 ,3		22 12 ,0

11 Long. App. ♄	11′	19°	52′	18″,6	Long. del ☼ per quell'istante
Abber.		—	13	,0	secondo le Tav. *De la Caille* 5′ 19° 33′ 38″,7
Nut.		—	11	,0	Long. corretta 11 19 51 54 ,6

Long. corr.	11	19	51	54 ,6	Dist. dall'opp. 18 15 ,9;
fatto il calcolo, risulta l'Opp. accaduta il dì 11 Settembre a					19ʰ 2′ 38″,7 t. v.
nel qual istante la long. del ☼ per dette Tavole					5′ 19° 50′ 36″,7
e la longit. elioc. di ♄ osservata					11 19 50 36 ,7
la latitudine geoc.					2 21 51 ,7 A.
elioc.					2 7 6 ,4
Long. elioc. di ♄ per quell'istante Tav. *la Lande* 2.ª Ediz.					11 19 54 39 ,6
Latit. elioc.					2 7 35 ,8

Onde l'error delle Tav. in longitudine + 4′ 2″,9
in latitudine + 29 ,4

Secondo le Tav. poi *de Lambre* (1789) Long. ♄ 11ˢ 19° 5o′ 26″,5
Latit. geoc. 2 21 33 ,2 A.

Onde l'error di queste Tav. in long. — 10″,2; in latit. — 18″,5

1795. 1 Dicembre Appulso d' η delle Plejadi 11^h 3′ o″,9 t.v.) Diff. di Decl. 3° 17′ 42″,o A.
del L. di ♄ 12 3 6 ,9)

4 η 10 5o 1 ,3) 3 19 39 ,1
del L. di ♄ 11 49 5 ,4)

5 η 10 45 43 ,1) 3 20 13 ,1
del L. di ♄ 11 44 25 ,5)

A. R. d'η per Catal. *De la Caille* ridotta all'app. 53° 5o′ 46″,35
Declinazione . . . . . 23 27 46 ,82 B.
Semidiametro app. di ♄ . . . . . 10 ;66

Quindi le A. R. di ♄ 1 Dicembre 68° 55′ 10″,11 Decl. 20° 9′ 54″,16 B.
4 68 39 40 ,61 20 7 57 ,06
le longitudini 2ˢ 10° 15′ 23″, 1 Latit. 1° 51′ 52″,60 A.
2 10 0 42 , 2 1 51 42 ,70

Moto retrogrado 14 40 , 9 9 ,90

Applicata l'aber. — 13″,o, la nut. + 15″,6; 1 Dicembre long. corr. ♄ 2ˢ 10° 15′ 25″,7
Long. del ☼ per quell'ist. Tav. noviss. *la Lande* 8 9 48 32 ,6

Distanza dall'opp. 26 53 ,1

Moto or. di ♄ retrog. 12″,28, del ☼ 2′ 32″,20, composto 2′ 44″,48

Istante dell'opp. il dì 1 Dicembre a 21^h 51′ 29″,o t.v.,
nel qual istante la long. del ☼ per dette Tav. 8ˢ 10° 13′ 25″,3
e la long. elioc. di ♄ osservata 2 10 13 25 ,3
Per le Tav. stesse la long. elioc. di ♄ calcolata 2 10 13 26 ,5
la lat. geoc. osservata 1 51 51 ,2
la lat. geoc. calcolata 1 51 34 ,2

Ondè l'error delle Tavole in long. + 1″,2; in latit. — 17″,6.

OCCULTAZIONE DI GIOVE

OSSERVATA

Dal Sig. Abate Vincenzo Chiminello.

Ricevuta li 30 *Ottobre* 1808.

1792. 28 Giugno Principio dell'Immers. di ♃ 5ʰ 34′ 24″,9 t. v.

Totale Immers.		35	48 ,4
Principio dell'Emers.	6	52	12 ,3
Totale Emersione		53	27 ,8

con tubo Dollondiano di piedi 5.

Longitudine geocentrica di ♃ nel principio per le Tav. noviss. *la Lande*	6ˢ	21°	43′	56″,7
nel fine dell'Occultazione	6	21	44	4 ,3
Latitudine geocentrica nel principio		1	16	59 ,4
nel fine		1	16	58 ,6
Parallasse orizzontale				1 ,6
Parallasse di altezza				1 ,3
Semidiametro orizzontale				18 ,8
Semidiametro di altezza				23 ,2

Long. vera ☽ 6ˢ 20° 59′ 50″,0 Lat. vera 1° 58′ 40″,6 Par. oriz. 57′ 46″,3 Diam. oriz. 31′ 33″,0

nel fine 6 21 43 57 ,5 2 2 14 ,5 57 49 ,3 31 34 ,6

Parallasse di altezza 46′ 55″,2 Diam. app. 31′ 51″,3 azimuto 22° 52′ 46″,3

45 33 ,4 31 54 ,0 1 12 3 ,5

Correzione per la Sferoide alla par. d'altezza 8″,1 Parall. di long. 28′ 44″,9

nel fine 9 ,3 16 23 ,0

all'azimuto 5″,9 Parall. di Lat. 36 52 ,8

nel fine 0 ,3 42 20 ,3

Quindi la long. app. della ☽ calcol. nel princip. 6ˢ 21° 28′ 35″,0; latit. app. 1° 21′ 47″,8

nel fine 6 22 0 20 ,5 1 19 54 ,2

Movimento relat. nell'orbita relat. in long.			31 40 ,7
in latit.			1 52 ,8
Inclinazione dell'orbita relativa		3	24 8 ,1
Distanza dalla congiunzione apparente, in principio			15 35 ,2
in fine			16 2 ,6

Onde le long. della ☽ app. osservate 6ʰ 21° 28′ 21″,5; le latit. 1° 21′ 33″,9
nel fine 6 22 0 6,9 1 19 40,1
e gli errori delle Tavole in longit. + 13″,5 in latit. + 13″,9
+ 13,6 + 14,1
Congiunzione conclusa dal principio 6ʰ 54′ 4″,4
dal fine 6 54 4,4.

SUL PARAGONE DEL CALCOLO DELLE FUNZIONI DERIVATE COI METODI ANTERIORI.

MEMORIA

Del Sig. Tommaso Valperga-Caluso.

Ricevuta li 2 *Novembre* 1808.

La chiarissima Accademia di Padova ha proposto un premio a chi meglio dimostri 1.° *In che differisca veramente la metafisica del calcolo sublime del Sig. Lagrange dalla metafisica dei metodi anteriori*. 2.° *Quale sia il grado della sua superiorità*. 3.° *Se, e come possa ridursi alla semplicità degli altri metodi, massimamente del Leibniziano, tanto nelle applicazioni puramente analitiche, quanto nelle geometriche e meccaniche*.

Non vi concorro, perchè dovrei tener occulto quel, ch' io ne pensi, fino a Maggio del 1810, con pericolo che allora non si pubblicasse: nè senza discapito mi sarebbe facile, per non dar indizio di me, astenermi dal mentovare una mia stampata Memoria sui metodi anteriori a quello del Sig. *Lagrange*: e ciò, che sono per esporre, non è precisamente ciò, che l'Accademia domanda, nè lavoro di calcolo da lusingarmi che per esso ella potesse coronare la mia Dissertazione.

Siccome però parmi di aver a dir cose non indegne di essere considerate, mi affretto a darle alla nostra Società Italiana con tutta la fiducia che non perciò saranno discare alla mentovata insigne Accademia, ch' io pregio e venero, come devo.

Nè credo ch' Essa voglia che imprendasi a divisare e discutere tutte le fondamentali teorie, le diversità di metafisica de' metodi anteriori; che sarebbe troppo lunga opera; e delle eccezioni, che a parecchie si danno, si avrà occasione di dir quanto basta. Onde a principio presenterò soltanto la speculazione la più antica.

I luoghi geometrici avevano reso ai Matematici familiare l'uso delle coordinate a rappresentare due qualsivoglia grandezze, fra cui si abbia un'equazione, e di cercare queste co-

ordinate a diversi punti, seguendo colla mente la descrizione, il corso de' *luoghi*, le cui intersezioni ci danno colle ivi coordinate la soluzione de' problemi. *Neuton* pensò a considerarle scorrenti, e aprì con questa speculazione una nuova maravigliosa carriera nella ricerca di grandezze non facili a trovarsi per altra via.

Sieno x e y due cose qualunque di grandezza connessa, onde reciprocamente dall' arbitraria determinazione dell' una resti l' altra determinata. Si potranno sempre far rappresentare da due coordinate, poniamo (*Fig.* 1.ª) da AP $= x$, PM $= y$, e da AQ $= y$, QM $= x$. Se suppongo, come nella figura, che crescendo AP cresce AQ, dovrò necessariamente concepire che allontanandosi il punto P da A con certa celerità o lentezza, Q si allontanerà pur da A con simultanea celerità, maggiore, minore, o uguale; e chiamando flussioni le velocità de' punti fluenti, avrò la flussione di x nella velocità del punto P, e la flussione di y nella velocità del punto Q, le quali sebbene d' ipotesi totalmente arbitraria, saranno però di grandezze necessariamente l' una all' altra connesse per la connessione delle grandezze di x, e y, che debbono venir sempre rappresentate da AP ed AQ.

Segniamo le flussioni con un $\dot{}$, onde sieno $\dot{x}$, $\dot{y}$ le flussioni di x, e y. Potranno niente meno $\dot{x}$, $\dot{y}$ farsi rappresentare da due coordinate di una seconda curva, dove facendo similmente fluire i punti, che terminano le coordinate, avrò le flussioni di queste, che saranno perciò flussioni di $\dot{x}$ e $\dot{y}$, grandezze rappresentateci da esse coordinate. Sicchè avremo flussioni di flussioni. Segniamo queste con esponenti apposti al $\dot{}$, onde sieno $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ le flussioni di $\dot{x}$, $\dot{y}$; $\dddot{x}$, $\dddot{y}$ quelle di $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, ec.

A veder come dalle fluenti si passi alle flussioni, cioè come dalla *legge di relazione*, per così chiamarla, che determina la grandezza di y corrispondente a ciascuna grandezza di x, si ritragga la legge di relazione, che determina $\dot{y}$ corrispondente a $\dot{x}$, sia primieramente il luogo geometrico di x, e y una retta e. g. AM (*Fig.* 2.ª). Essendovi sempre $x : y ::$ AP : AQ in una ragione costante, poniamo di $a : b$, se si fa scorrere il punto P in p, dovrà il punto Q scorrere in q con tal velocità, che sia pur sempre $Pp : Qq :: a : b$. Onde qualunque incremento Pp si pigli ad arbitrio a rappresentar la

flussione δx, s'avrà da pigliare per δy un incremento $Qq = Pp \times \frac{b}{a}$, e però far $\delta y = \frac{b\delta x}{a}$.

Nè v'è difficoltà quando così può il moto supporsi uniforme, onde la grandezza delle velocità generatrici degl' incrementi evidentemente vien da essi rappresentata, come sempre la grandezza delle cagioni si misura dagli effetti.

Ma quando il rapporto fra δx e δy non è costante, la legge di relazione fra esse non si può dedurre immediatamente dai rapporti degl' incrementi; perchè una almeno delle due flussioni si ha da suppor variare, mentre si fan gl' incrementi; e perciò uno degli incrementi non sarà puro e totale effetto della flussione quale ella era al cominciar di esso; e per altra parte la grandezza di tal flussione, poichè non per tutto è la stessa, non si può assegnare che riferendone la determinazione a certo punto; poniamo quello, dove l'incremento comincia.

Nella Fig. 1.ª se io suppongo $AP = x$ generata con moto uniforme da un punto, che va di A in P, e che AP rappresenti δx costante, AQ non corrisponderà a quella grandezza di δy, con cui si è cominciato a generare AQ, perchè la velocità del suo punto generatore ha dovuto via via sempre scemare mentre esso andava di A in Q. Se però supponiamo che esso punto colla velocità, che aveva in A, se fosse questa sempre rimasta la medesima, sarebbe giunto in S, quando il punto generatore di x è giunto in P; avendo fatto $\delta x = AP$, sarà $AS = \delta y$ la grandezza della flussione quale ell'era al cominciamento di AQ.

E così generalmente possiamo pigliar per principio che a determinare i rapporti delle flussioni, quando queste non sono in ragion costante, si debbono pigliare gl' incrementi, non quali si fanno, ma quali si farebbero, se le flussioni rimanessero, o continuassero quali sono al punto, a cui se ne vuole riferire la determinazione.

Ed è chiaro che questo principio può applicarsi anche dove la fluente non sia rappresentata da una linea. Ma perciò cominciamo a osservare che siccome essendo $y = \frac{bx}{a}$, abbiamo trovato $\delta y = \frac{b\delta x}{a}$, così posto $z = \frac{cu}{a}$, sarà $\delta z = \frac{c\delta u}{a}$; onde si possono le stesse grandezze rappresentare a piacere o

colle linee y, z, δy, δz, o colle aree bx, cu, $b\delta x$, $c\delta u$, per le quali saranno $b\delta x$, $c\delta u$ le flussioni di bx, cu, come δy, δz lo sono di y, z. Vale a dire che la flussione d'un rettangolo, di cui sia un lato costante, l'altro fluente, sarà il rettangolo del lato costante per la flussione del fluente.

Or non sia l'area un rettangolo, ma solo da due lati terminata da due rette perpendicolari l'una all'altra, AP $= x$, PM $= y$ (*Fig.* 3.ª), e sia terzo termine dell'area una retta, che faccia in M un angolo qualunque con MP. Se io fo scorrere con moto uniforme la perpendicolare y da PM in pm, o in pm', è chiaro che crescerà l'area non con prestezza costante, ma o via via maggiore, o via via minore, secondo che PM anderà crescendo, o scemando. Dunque sarà il caso di doversi la flussione rappresentare pigliando l'incremento non quale si fa, ma quale si farebbe, se le flussioni perseverassero quali sono al punto, a cui se ne vuole riferire la determinazione. Onde per la flussione dell'area, dove $y =$ PM, si avrà da pigliar l'incremento nel supposto che PM non cresca, nè scemi; poichè non si può altrimenti la flussione dell'area conservar la stessa. Dunque, qualunque sia l'angolo in M, la flussione dell'area sarà sempre PM$m''p = y\delta x$, supposta $\delta x =$ Pp, ed al rettangolo di Pp per una retta $= 1$.

La verità di questa conclusione, così legittimamente dedotta da sì evidente principio, si rende palpabile col riflesso che l'incremento nel caso d'obbliquità d'angolo si può scomporre in due parti, l'una PM$m''p$, la stessa per ogni obbliquità, l'altra variabile, il triangolo m''Mm, ovvero m''Mm', da aggiungersi o togliersi, e che questa parte variabile, proporzionale a δy, è manifestamente l'effetto dell'aumento o della diminuzione di quella velocità, che varia insieme con y; onde anche ne' due casi della stessa mutazione di velocità in più, e in meno abbiamo eguali i triangoli, che fanno il divario fra l'incremento corrispondente alla prima velocità, e i provenienti da essa velocità alterata.

Così adunque la flussione d'un'area per lo moto, quale si è supposto, di un lato, sarà la stessa in ogni caso; essendo chiaro che il principio, da cui si è tratto il teorema, si applica nello stesso modo ove PM sia l'ordinata a una curva, come nella *Fig.* 4, in cui si vede similmente che i divarj fra gl'incrementi quali si fanno, e l'incremento, che si dee pi-

gliare per aver il rappresentativo della flussione dell'area, sono gli effetti dell'alterazione di essa flussione per lo crescere o scemare di y. Ma l'evidenza del teorema non avendo bisogno di questo riflesso, non m'arresto a schiarirlo.

Ritorniamo alla *Fig.* 1.ª Il rettangolo AQMP $= xy$ è composto dell'area AQM, e dell'area AMP, le cui flussioni per ciò, che veniamo di dimostrare, sono $x\dot{y}$, e $y\dot{x}$. Dunque la flussione di esso rettangolo xy sarà $x\dot{y} + y\dot{x}$.

Avendo $\dot{(xy)} = x\dot{y} + y\dot{x}$, fo $x = y$, ed ho $\dot{(xx)} = 2x\dot{x}$; e fatto quindi $y = x^2$, $\dot{y} = 2x\dot{x}$, ho $\dot{(x^3)} = 3x^2\dot{x}$, e così proseguendo a fare $y = x^3$, poi $y = x^4$, ec. è chiaro che il coefficiente e l'esponente cresceranno ciascuna volta di una unità, e sarà sempre $\dot{(x^m)} = mx^{m-1}\dot{x}$, almeno in questo nostro supposto, dove m è numero positivo ed intero.

Per accertarlo in ogni altro sieno n, e p numeri positivi ed intieri. Fatto $z = \frac{1}{x^n}$; $zx^n = 1$ è costante; onde ne dee la flussione esser nulla, $nzx^{n-1}\dot{x} + x^n\dot{z} = 0$; $\dot{z} = -\frac{nz\dot{x}}{x} = -\frac{n\dot{x}}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}\dot{x}$.

Fatto $z = x^{\frac{n}{p}}$, è $z^p = x^n$, $pz^{p-1}\dot{z} = nx^{n-1}\dot{x}$. Ora è $z^{p-1} = x^{n-\frac{n}{p}}$. Dunque $\dot{z} = \frac{nx^{n-1}\dot{x}}{px^{n-\frac{n}{p}}} = \frac{n}{p}\, x^{\frac{n}{p}-1}\dot{x}$. Dunque sia $m = -n$, sia $m = \frac{n}{p}$, sostituendo si avrà sempre $\dot{(x^m)} = mx^{m-1}\dot{x}$.

Ho voluto dar compita la dimostrazione di un teorema, che si può dire il cardine, su cui tutta si volge la parte algebraica del metodo diretto, e inverso. Ma so bene che non debbo quì darne un trattato; e me ne basta questo cominciamento per giungere a quella più generale speculazione, che qui mi bisogna. Per cui sia $y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ ec. Avrò $\dot{y} = B\dot{z} + 2Cz\dot{z} + 3Dz^2\dot{z} + 4Ez^3\dot{z} +$ ec. e supposta $\dot{z}$ costante,

$$\ddot{y} = 2C\dot{z}^2 + 2.3Dz\dot{z}^2 + 3.4Ez^2\dot{z}^2 + \text{ec.}$$
$$\dddot{y} = 2.3D\dot{z}^3 + 2.3.4Ez\dot{z}^3 + \text{ec.}$$
$$\ddddot{y} = 2.3.4E\dot{z}^4 + \text{ec.}$$

Dunque, quando $z=0, y=A, \frac{\delta y}{\delta z}=B, \frac{\delta^2 y}{\delta z^2}=2C, \frac{\delta^3 y}{\delta z^3}=2.3D, \frac{\delta^4 y}{\delta z^4}=2.3.4E$, ec. Quindi notando y' un altro valore di y a distinguerlo da quello, a cui si hanno a riferire le flussioni, e che s'intenderà determinatamente significato da y, sia questo la coordinata di $x=b$, e però $z=x-b$; fatto $\delta x=\delta z=1$, ponendo in vece di A, B, C, ec. i valori loro, sarà $y'=y+z\delta y+\frac{1}{2}z^2\delta^2 y+\frac{z^3\delta^3 y}{2.3}+\frac{z^4\delta^4 y}{2.3.4}+$ ec. dove y' è la coordinata di $x=b+z$.

Così dai valori di y, e delle sue flussioni di ogni ordine, quali corrispondono a certo valore di x, questo celebre teorema, che è il Coroll. II a pag. 23 del Metodo degli Incrementi di *Taylor*, naturalmente conduce ad altri valori di y corrispondenti ad altri valori di x. Ma insieme generalmente vi si scorge la connessione delle flussioni di ogni ordine coi diversi valori corrispondenti di x ed y, per la qual connessione lo stesso teorema dà il passo dai valori delle coordinate a quelli delle flussioni.

Vediamolo cangiando frasi; e sieno $fx, f(x+i)$ la stessa funzione di x, e di $x+i$; onde supposti x, e $x+i$ due valori dell'ascissa di una curva, sono $fx, f(x+i)$ i corrispondenti valori dell'ordinata. Fatto $i=z$, e supposta $y=fx$ la coordinata di $x=b$, $f(x+i)$ viene a essere lo stesso che y' coordinata di $x=b+z$, e però $f(x+i)=fx+i\delta y+\frac{1}{2}i^2\delta^2 y+\frac{i^3\delta^3 y}{2.3}+\frac{i^4\delta^4 y}{2.3.4}+$ ec. dove $\delta y, \delta^2 y$, ec. essendo le flussioni prima, seconda, terza ec. di fx, per aver queste flussioni basterà trovare i valori di p, q, r, s, ec. nello sviluppamento di $f(x+i)=fx+pi+qi^2+ri^3+si^4+$ ec. serie identica colla precedente, ed avremo $\delta y=p, \delta^2 y=2q, \delta^3 y=2.3r, \delta^4 y=2.3.4s$, ec.

Ecco donde è partito il Sig. *Lagrange*, il quale non ha però ristretto il suo pensiero a trarre tutte le flussioni da sviluppamento di serie; egli ha concepito, e condotto a fine un molto più gran disegno, di dare un metodo, ch'egli giudica non che il migliore, il solo senza eccezioni per far tutto ciò, che si fa colle flussioni, o altri calcoli equivalenti, senza che più per lo calcolo sia d'uopo neppur sapere che cosa sieno flussioni o differenziali.

In luogo adunque sia di quelle, sia di questi egli introduce con nuovo concetto le *funzioni derivate* con denominazione adattatissima al suo metodo; e distinguendo le funzioni in *primitive*, e *derivate*, e queste in *prima*, *seconda*, *terza*, ec. ne segna la distinzione con apici apposti all'f, che significa la funzione primitiva, onde se questa è fx, la sua funzione prima derivata è $f'x$, la seconda $f''x$, funzione prima di $f'x$, la terza $f'''x$, funzione prima di $f''x$, ec.

La funzione prima derivata è il primo coefficiente della serie, che si sviluppa sostituendo $x+i$ a x. Quindi le serie

$$f(x+i)=fx+pi+qi^2+ri^3+si^4+\text{ec.}$$
$$f'(x+i)=f'x+p'i+q'i^2+r'i^3+\text{ec.}$$
$$f''(x+i)=f''x+p''i+q''i^2+\text{ec.}$$
$$f'''(x+i)=f'''x+p'''i+\text{ec.}$$

danno $f'x=p$, $f''x=p'$, $f'''x=p''$, $f^{v}x=p'''$, ec.

Col teorema di *Taylor* è facile eliminare i nuovi coefficienti delle serie per le funzioni derivate, e scorgere che sono

$$f'(x+i)=f'x+2qi+3ri^2+4si^3+\text{ec.}$$
$$f''(x+i)=f''x+6ri+12si^2+\text{ec.}$$
$$f'''(x+i)=f'''x+24si+\text{ec.}$$

siccome la prima è $f(x+i)=fx+if'x+\frac{1}{2}i^2f''x+\frac{i^3f'''x}{2.3}+\frac{i^4f^{v}x}{2.3.4}+\text{ec.}$

Il Sig. *Lagrange* lo dimostra convenientemente al suo metodo con due sostituzioni, ch'ei fa nello sviluppamento di $f(x+i)$, una di $i+o$ a i, l'altra di $x+o$ a x, colle quali si deve avere un medesimo sviluppamento di $f(x+i+o)$, e però i termini $+op+2ioq+3i^2or+4i^3os+$ ec. trovati colla prima sostituzione, hanno a essere identici coi termini $+op+iop'+i^2oq'+i^3or'+$ ec., che si hanno colla seconda. Quindi $p'=2q$, $q'=3r$, $r'=4s$, ec. Veggansi le sue non so perchè anonime *Leçons sur le calcul des Fonctions ....à Paris an* 1806, dove a pag. 11 la sostituzione di $x+o$ è più chiaramente ragionata che a pag. 14 della *Théorie des Fonctions Analytiques* stampata in Maggio 1797 col nome dell'Autore, il quale nelle mentovate lezioni avendo fatto molti miglioramenti, e non pochi di ben altro rilievo che non è l'accennato, a esse piuttosto io debbo rimandare chi vuol conoscere ciò, che dobbiamo a cotanto Geometra in questa sua nuova Analisi.

Vi vedrà non solo riempito in tutta la sua estensione l'assunto primario di derivare le flussioni dalle serie, e darne un

calcolo, che compitamente può tener il luogo del Neutoniano; o si voglia del Differenziale e Integrale in ogni genere di ricerca e applicazione; ma vedrà inoltre tutta cospersa l'opera di lumi d'altre analitiche ricerche, d'osservazioni, di metodi, di schiarimenti spettanti ad altre parti delle Matematiche inseriti dove l'occasione si offriva opportuna. Nè con quest' opera può sostenere il paragone alcun trattato, ch'io conosca, delle Flussioni; benchè veramente egregio sia quello di *Mac-Laurin*, quello di *Muller* abbia parti assai buone, e migliore sul totale sia quello di *Simpson*. Ma non possono non trovarsi talora al di sotto de' lumi dell'età nostra, avendo l'Analisi dopo i libri loro fatto maravigliosi progressi per opera di molti, e segnalatamente del Sig. *Lagrange*. Però non cercando del pregio del suo libro, ma del metodo in paragone del Neutoniano, non posso correre a preferirlo; perchè vi sono vantaggi per un verso con isvantaggi per altri, e sul totale mi sembra che adottando il nuovo calcolo più si abbia a perdere che a guadagnare.

Il metodo delle flussioni parte, dirò così, da terra, quello delle Funzioni derivate piglia le mosse da alto assai; ma i due metodi salgono all'istessa altezza. Il veder ogni cosa inchiusa nell'idea generalissima di funzione, e quindi sviluppare quasi allo stesso modo tutto ciò, che si vuole, è bellissima speculazione di analitica maestria. Ma vi si vede insieme che non è questa la via, per cui fosse facile di pervenire a que' teoremi ancor ignoti, ai quali l'Autore l'ha condotta, perchè gli eran notissimi. E chi non ha parte alla gloria di aver aperta questa nuova strada, volentieri preferirà quella, che ha condotto alle scoperte, e può più facilmente condurvi ancora. Nella nozione di funzioni, che sono i primi coefficienti di certe serie, non traluce come sieno proprio mezzo per conseguire ciò, che è facile prevedere che colle flussioni si conseguirà. Le dimostrazioni di puro calcolo e artifizio d'algebra possono per diversi riguardi e preferirsi, e posporsi a quelle di ragionamento, perchè la certezza de' calcoli è senza luce, e se un falso aspetto d'evidenza può ne' ragionamenti ingannare, anche ne' calcoli rivisti più volte veggiamo talor tardi di aver fatto errore.

Quanto alla Metafisica io sono ommiamente del sentimento del Sig. *Lagrange*, che sia l'Analisi, sia la Geometria, a cui

cui più volentieri io riferisco la ricerca delle grandezze in astratto, non deve avere altra metafisica che quella de' proprj suoi primi principj. Però questa metafisica, che chiamerò matematica, richiede qui un poco di discussione; poichè di essa nominatamente l'Accademia di Padova c'invita a ragionare.

Per cominciar adunque dalla dichiarazione delle parole, acciocchè non ne resti vaga l'idea, dirò che a mio intendimento la metafisica matematica è la teoria, che ci guida e accerta in ogni ricerca e determinazione di grandezze. Essa è la speculazione, che fa strada alla misura d'ogni cosa. La pratica può soltanto appressarsi alle misure vere; ma la speculazione vuol trovarle e dimostrarle rigorosamente, ed ha perciò bisogno che le si concedano alcune supposizioni, senza le quali non si può concepire grandezza alcuna precisamente determinata. La prima di queste si è la determinazione del *punto*, designazione di luogo preciso. Se io lo concepisco un cerchietto quanto si voglia piccolo, non mi basterà questo mai ad assegnare un termine di misura con precisione assoluta. Potrò concepirne il termine al centro del cerchietto: ma l'idea del centro già include quella del punto matematico. E se vi volessi con idea volgare sostituire un granelluccio di polvere, sottile eziandio quanto gli atomi d'Epicuro, se gli do forma sferica, finchè io non ne suppongo il diametro assolutamente nullo, vi concepirò sempre distinti luoghi, dentro, e d'intorno, inclusi dalla superficie. Che però, non potendosi annullare il diametro senza annullare insieme il cerchio, e la sfera, ella è chiara la necessità dell'idea del punto, quale dal Geometra si concepisce, e non può esistere che nel pensiero, non è corpo, non ha grandezza: è un mero concetto, e non più. Una designazione sì precisa è impossibile in pratica; ma dal supporla in teorica deriva ogni determinazione di grandezza, quale si vuole assolutamente precisa in Geometria. Nè altrimenti ne potrebbono essere le dimostrazioni di totalmente rigorosa verità.

Accettata la nozione de' punti, due ci danno precisa la posizione, e la lunghezza di una linea retta, un terzo fuori di essa determina un arco circolare, il piano, e sovra esso tre angoli, un'area. Ma per andar avanti felicemente nella geometrica speculazione si vuol sempre badar bene che mai essa non s'appoggi a supposti, che non hanno determinazione di

grandezza precisa, come quando tanto si questionò sull'*angolo di contatto*. Si può a quel punto considerar la tangente come la direzione della curva, sicchè misura degli angoli piani fra linee curve sieno gli angoli, che fanno le tangenti all'intersezione; e per l'angolo mistilineo fra una curva e una retta, che la seghi, s'intenda l'angolo, che fa essa retta colla tangente al punto, dove la curva è tagliata. Ma per avere un angolo della tangente colla curva, a dar la grandezza di cotal angolo sarebbe necessario, oltre il punto del contatto, ed altro punto qualunque nella tangente, un altro punto nella curva. Or questo quale dovrà essere? Perciò l'idea di angoli di contatto non è di grandezze determinabili; non dee riceversi in geometria. Si dee dire che la tangente coll'arco non fanno angolo, poichè hanno al contatto la stessissima direzione.

Che poi fra la tangente e l'arco si possano per lo punto del contatto far passare quanti altri archi tangenti si vuole, questo non ha nè difficoltà, nè maraviglia, se non per chi ha l'infelicità purtroppo frequente di non concepir il punto senza grandezza: onde non vegga che sempre assolutamente due punti o del tutto coincidino e sono un solo, o sono disgiunti affatto e discosti. Punti, che l'un l'altro si tocchino, non sono punti matematici. Possono questi essere quanto si vuole vicini. Ma vicino e lontano, come picciolo e grande, eziandio quando sembrano detti assolutamente, sono pur sempre relativi, se non altro, all'uso de'sensi, ai mezzi ed ai bisogni nostri. E possiamo sempre a piacere gli stessi punti dir vicini o lontani, paragonandone la distanza ad altra maggiore o minore. In un cerchio i punti estremi del seno retto di un minuto secondo sono vicinissimi rispetto alla distanza loro dal centro, e lontanissimi rispetto a quella degli estremi del seno verso. La qual cosa si concepisce dal Geometra non meno chiaramente in un cerchio di diametro minore d'un millimetro, che in uno maggiore dell'orbita della Terra intorno al Sole. Perchè il cerchio, ch'ei considera, è sempre di pura contemplazione intellettuale; nè si tratta di veder cogli occhj, e distinguere quelle grandezze in un cerchio realmente descritto dove che sia.

E ciò sia detto acciocchè fin da'primi elementi si scorga l'importanza dell'attenzione a non mai confondere i teorici

supposti coi casi pratici; e vieppiù a non mai assumere supposti d'idee di grandezze, che non si possono precisamente determinare. La speculativa non le determina, lascia alla pratica che le individui al bisogno: ma deve esserle chiaro che quando certe cose fossero fatte, sarebbe certa grandezza determinata, e che quelle certe cose almeno mentalmente si possono fare così e così, onde sola ragione di non determinar le grandezze sia l'inutilità.

Nè a spiegarsi le giova sempre dir tutto; perchè spesso molto più facilmente si conduce altri a vedere una verità tralasciando molte idee intermediarie per porre, dirò così, in contatto le bastanti a far concepire ciò, che si vuole. Le intermediarie si sottintendono; e quando ciò sia difficile, potrà l'ommissione biasimarsi; ma se l'ommissione si può supplire, la teoria sta. Così chi non vegga qual idea chiara e determinata si voglia significare colla parola *direzione* di una curva, potrammi riprendere di averla adoperata senza dichiararla qui avanti. Ma non ne sarà però meno certa, evidente la teoria, per cui l'ho adoperata. Perchè l'idea si può dichiarare: che sebbene *direzione* propriamente sia solo di linea retta, impropriamente se si vuole assegnare una direzione al moto, con cui si può descrivere un arco di cerchio, l'idea di direzione essendo pur sempre di linea retta prolungabile all'infinito ai lati opposti, è chiaro che si dovrà pigliare per direzione del moto circolare quella retta, che non si accosta più all'uno che all'altro di due punti della periferia presi a distanza eguale di qua e di là dal punto, che si considera, quella, che sola passa per quel punto, e non vi attraversa la curva. Nè importa che in qualunque modo si spieghi applicata alle curve la parola *direzione*, siccome non propria, non possa mai rendersi irreprensibile a un cavilloso. Perchè niuna cavillazione può renderne l'uso ambiguo, o indefinita la determinazione, sia di essa, sia di qualunque grandezza ne dipenda. Nè la buona teoria geometrica richiede che sulle sue parole non si possa disputare, purchè la disputa a lei non spetti, sia d'altra scienza o facoltà, di Dialettica, d'Ontologia, di Fisica, o di qual altra cognizione si voglia. A lei basta che i suoi concetti conducenti alla misura delle grandezze non lascin dubbio su queste. Che cosa fuori del suo concetto sia *corpo* ella non cura; chiama *solido* una cosa, che non esiste che nelle

sue speculazioni. Tutto sta che queste sieno proprie ad accertar le grandezze. E sarebbe manifesto equivoco il dire che l'accertamento della grandezza non è possibile senza che gli preceda l'accertamento della cosa, che ha quella grandezza. Perchè la prenozione necessaria non è dell'essenza, e della natura del soggetto, nè della possibilità fisica ch'esso esista, e sia più che un supposto mentale. D'uopo è solo che sia accertato per quella parte, da cui dipende la sua grandezza; come se dirò che y è la cosa, la cui relazione a x è $y = X$. Sicchè nell'esame delle teorie geometriche a distinguere le sode obbiezioni dalle sofisticherie, si dee considerare se portin dubbiezza sul *quanto*.

Con questi riflessi è facile scorgere in che pecchino parecchie teorie più o meno diverse fra loro, ma che tutte coincidono a darci lo stesso Calcolo differenziale e integrale. Esse introducono nel calcolo supposte grandezze indeterminabili; gli vogliono dar per soggetto cose, delle quali il *quanto* non si può assegnare. Desidero che si legga ciò, che ne ho scritto nelle Memorie dell'Accademia di Torino *Années* 1786-87. *Des différentes manieres de traiter cette partie des Mathématiques que les uns appellent Calcul différentiel, et les autres Méthode des Fluxions*. Ma non fa d'uopo ch'io qui il ripeta con quel di più, che vi potrei aggiungere a mostrare non esservi mezzo fra le grandezze finite ed il nulla. Poichè se non s'incontrasse difficoltà negli infinitamente piccoli, niuna eccezione avrebbe la metafisica di detti calcoli, non si farebbe luogo al quesito, cui rispondo, ai desiderj dell'Accademia, che l'ha proposto.

Si vuol però badare che quantunque gl'infinitesimi possano sembrare il soggetto del calcolo infinitesimale, in verità vi sono soltanto un mezzo di ricerca di grandezze finite. Onde non è il caso totalmente lo stesso che per l'angolo di contatto, dove il concetto d'infiniti angoli infinitamente piccioli, uno minor dell'altro si terminava alla considerazione di esso angolo, e a comparazione di grandezze dove non v'ha grandezza alcuna: mentre al contrario il Calcolo differenziale è di speculazione utilissima nè più, nè meno che il Metodo delle flussioni; nè i suppostivi infinitamente piccioli il rendono incerto, perchè non vi sono che come uno strumento, che basta saper maneggiare. L'impossibilità di concepirli con idea

veramente determinata ne rende un po' fosche e paradosse le fondamentali dimostrazioni, ma non tanto che non vi traluca la certezza della verità, e ne restino i trovati dubbiosi. Sicchè quello, che vi si biasima, si può dire non più che un neo sopra un bellissimo volto.

Sia però quanto si voglia picciolo questo neo, sarebbe gran torto, potendo, non volerlo togliere: ed a toglierlo una spedita via ci si mostra subito colla stessa riflessione, che ci ha condotti a scorgerlo, ed è che non si debbono in matematica mai assumere idee di grandezze, che non si possono precisamente determinare. Basta dunque risalendo alla prima supposizione di *Leibnizio* correggerla un pocolino. Egli nel 1684 (Operum T. III, p. 167, 169) supponeva $\eth x$ *pro arbitrio assumpta*, e $\eth x$, $\eth y$ proporzionali *differentiis, sive incrementis vel decrementis momentaneis*. Assumansi così pertanto i differenziali di grandezza determinabile a piacimento; e perchè il concetto d'incrementi momentanei ricade nella stessa difficoltà degli infinitamente piccioli, si spiani questa almen colla frase, come si può, adoprando l'usitatissima, benchè abusiva, d'infinitamente piccoli. Per esempio se dirò che vi sono de' rapporti, che si trovano facilmente colla comparazione di diversi valori successivi corrispondentisi, fingendo fra i valori successivi la differenza infinitamente piccola.

Che pertanto si segnino col Δ le differenze reali, e però finite, che chiameremo semplicemente differenze, onde sieno Δx, Δy, Δz, ec. le differenze, che si corrispondono fra due valori di ciascuna delle variabili x, y, z ec. E col $\eth$ si segnino grandezze, che si vogliono in quel rapporto fra loro, in cui dovrebbono essere le differenze, quando fossero infinitamente piccole. Cotali grandezze $\eth x$, $\eth y$, $\eth z$, ec. sieno i *differenziali*.

A determinarli rispettivamente avrassi a dar loro il rapporto, che dovrebbe avverarsi nelle differenze, s'elle potessero essere infinitamente piccole; mentre il fingerle tali non è altro che supporle quali si scorge che tendono a essere impicciolendo, e diverrebbero finalmente, se nell'annientarsi non cessassero di esistere.

Quindi per lo differenziale di xy avendo fra due suoi valori consecutivi, 1.° xy, 2.° $xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$ la differenza $x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$, e però il suo rapporto alla dif-

ferenza arbitraria Δx essendo $\frac{x\Delta y}{\Delta x} + y + \Delta y$, vi si suppongano Δx e Δy infinitamente piccole; ne potrà il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ niente meno esser grande, ma Δy dovrà farsi nulla, e però il rapporto de' differenziali sarà $\frac{x\partial y}{\partial x} + y$, e $x\partial y + y\partial x$ il differenziale di xy.

Nulla più facile che far capire questa dimostrazione a chicchessia. Poichè due sole cose vi sono non tratte evidentemente dalla definizione, l'una che per la supposizione dell' infinita piccolezza delle differenze non ne segue che $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sia picciolo, l'altra che per essa dee farsi $\Delta y = 0$. Per porre in evidenza la prima basta osservare che fatto $\Delta y = a\Delta x$, per quanto s'impiccioliscano Δy e Δx, sarà sempre $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$; per la seconda osservare che sinchè non si sarà fatta $\Delta y = 0$, si potrà proseguire a impicciolirla, e però non sarà ancor picciola infinitamente, come si vuol supporre. Vero è che questo è un voler suppor l'impossibile. Ma si è previamente spiegato come si abbia a intendere la supposizione.

Così adunque con picciola mutazione si può togliere dal Calcolo differenziale ogni biasimevole metafisica; e vie meglio se i differenziali si definiranno grandezze, i cui rapporti a un' arbitraria sieno i limiti de' rapporti delle differenze, le quali si vadano impicciolendo sino al nulla. Ma così verrebbero i differenziali a identificarsi colle flussioni; alla qual cosa le passioni umane hanno indutto molti a ripugnare acremente. Le gare hanno impegnato grandi Geometri a volere che il trovato di *Leibnizio* fosse un equivalente sì, ma non essenzialmente lo stesso con quel di *Neuton*. L'invenzione di *Neuton* è di stromento per trovare, e si vuole che sia altro quando si dimostra con altro supposto. Le Sezioni Coniche sono state proposte e dimostrate in molti diversissimi modi partendo da definizioni diverse, e pur quelli stessi, che nemmeno si curano di dimostrarne l'equazione nel cono, le chiamano tutti Sezioni coniche. Linee proporzionali agl' incrementi momentanei sono le flussioni, ma si vuole che non sieno flussioni i differenziali, e perciò è d'uopo che non sieno grandezze finite; ond'è la necessità di frasi assurde.

Lasciando però questo impegno, e supponendo i differenziali essere grandezze, come tutte le altre, che non si determinano, ma si potrebbero determinare senza difficoltà, sarà tolto ogni motivo di adottare una metafisica riprensibile, e tutti facilmente s'accorderanno a riguardare i divarj de'modi, con cui si potranno trattare le flussioni e i differenziali, come nulla più importanti che quelli de'trattati delle Sezioni Coniche. Onde si potrà similmente eziandio convenire del nome. Poichè fra tutti i nomi, con cui si possono chiamare grandezze, che impropriamente si possano dire proporzionali agli incrementi momentanei, ogni ragion vuole che il nome di flussioni si preferisca, non solo per dritto d'anzianità e di possesso, e per riguardo di gratitudine all'inventore, ma perchè presenta l'idea la più chiara, più facile, più naturale, e più manifestamente connessa, non con uno solo, ma con tutti i principj, con cui se ne possono trovare i rapporti.

Nell'esposizione, da cui ho cominciato, mi sono valuto del principio il più proprio, e immediato, che per la flussione, che varia, si vuol prendere l'incremento qual si farebbe, s'ella non mutasse. Il pensiero è così naturale ed obvio che anche un idiota per dar la misura della velocità, con cui vada egli allora camminando, potrà dire che di quel passo proseguendo ei farebbe due, tre o più miglia l'ora. Vero è che la velocità, la quale un idiota facilmente concepisce potersi ottimamente misurare col cammino, che non si fa, ma si farebbe, suole supporsi perseverare per alcun tempo la stessa. Ma siccome la determinazione di cotal misura di velocità non dipende in conto alcuno dal maggiore o minor tempo del moto realmente fatto con quella velocità, così è naturale di prescindere dalla considerazione di questo tempo. O la velocità si cangi di tratto in tratto per salto, o del continovo, la misura della sua grandezza non può esser altra; poichè l'idea di grandezze nelle velocità evidentemente si identifica coll'idea delle grandezze degli spazj, che le velocità fanno percorrere supposte costanti.

Il matematico non deve usar parole, che non s'intendano abbastanza per lo suo intento di condurre a certa e precisa misura delle grandezze. Ma il non adoperar parole, su cui si possano far questioni fuor di proposito, in niun discorso è possibile. Il cercare che cosa sia *velocità* è questione di Me-

tafisica, e di Fisica, non di Geometria. La difficoltà più facilmente si scorge nella velocità, che varia del continuo. Ma è assolutamente la stessa nel moto uniforme considerato in un qualunque suo punto, sempre che si vuole stare alla precisione del punto matematico. Sinchè in un punto il movimento sarà del tutto nullo, il mobile starà immoto in quel punto eternamente. E se in quel punto v'è qualche cosa di movimento, che non è nulla, sia questa un impeto, una tendenza, un'energia, una forza di Inerzia Neutoniana, o che che si voglia, questo è la velocità, *quantitas motus in actu*, la grandezza del movimento, che si fa; non già fatto, o da farsi. Ed è chiaro che quando la grandezza ne sia stata a quel punto precisamente tanta, o si mantenga, o non si mantenga la medesima, nulla importa; non potrà essere stata altra a quel punto, perchè abbia variato poi. Molte sofisticherie si possono dire contra il moto, sulle quali basterà vedere la IV.ª Acroasi soggiunta alla Logica del Facciolati. E conosco un filosofo, che tuttora seriamente crede non potersi il moto spiegare che con sempre nuova creazione della stessa cosa in diverso luogo. Ma v'ha pur chi nega l'essere delle corporali cose, e le vuol tutte meri fenomeni. Non avremo a valerci del verbo *essere* in Matematica?

Ma mi si dirà che non si pretende che non debba il matematico prescindere da sì fatte questioni; nè gli si vieta d'adoperare al bisogno la parola *velocità*; solo si vuole che ne aspetti il bisogno nelle teorie della Meccanica. Osservo pertanto che nella nozione delle flussioni la velocità non è propriamente e del tutto la stessa cosa che in Meccanica. Noi non possiamo parlare delle cose ideali che trasportandovi i vocaboli dalle cose corporali. In queste la velocità è determinata da forza di Natura, nelle flussioni da forza di conseguenza di una legge di relazione supposta fra le fluenti. Ora il bisogno di mentovare questa geometrica velocità vien per appunto nel trattato delle flussioni. Si potevano queste in vece di velocità dire grandezze di mutabilità, o di variabilità. Ma sarebbe stata la frase senza motivo men chiara; poichè non parlandosi di cose spirituali, nè morali, tutte le mutazioni o variazioni si fanno unicamente col moto. Ora quello d'un punto bastando a qualunque variazione di grandezza rappresentata da una linea, qual ragione v'era di non valersi di così facil supposto?

Un secondo general principio, o piuttosto mezzo per trovare e dimostrar le flussioni sono gli *evanescenti*, i quali il Sig. *Lagrange* in fine della pag. 2 ponendo come un sinonimo degli infinitamente piccoli, ne inferisce esserne l'uso soggetto alle stesse difficoltà che il Calcolo Differenziale. Non so come abbia potuto ciò scrivere. Il Calcolo differenziale soffre difficoltà per gl'infinitamente piccoli, perchè a essi dà valore, e ne fa equazioni; quello delle flussioni non dà valore agli evanescenti, fa svanire gl'incrementi. Gl'infinitamente piccioli o si vogliono soltanto di picciolezza da non tenerne conto fra grandezze d'altro ordine, e non appagano lo spirito geometrico nella speculazione, o son nulla, e a un tempo stesso nol sono, sono un *nulla rispettivo*, e in questo *nulla rispettivo* ne sta tutta la difficoltà. Gl'incrementi svanendo cessan d'essere, diventan nulla assoluto: nè quando per mezzo loro le flussioni si trovano, si hanno perciò le flussioni a concepire piuttosto picciole che grandi. *Neuton* soleva tralasciare di tener conto della flussione costante, la quale essendo arbitraria, è naturale di farla $= 1$. Poneva adunque l'unità per le flussioni la stessa con quella delle grandezze costanti, o fluenti.

Il trovarle, dimostrarle per mezzo degli evanescenti è di tutt'altra ragione che la metafisica degl'infinitamente piccoli, e si riduce alla considerazione de' limiti mentovata prima dal Sig. *Lagrange*; siccome quella, che posa unicamente sul principio che impicciolendo gl'incrementi, la ragion loro $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ si va via via appressando alla ragione delle flussioni $\frac{\delta y}{\delta x}$, senza però giungervi che a quel punto, dove Δy e Δx pervengono insieme a svanire, esser nulla; nel qual punto $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{0}$ dovrebbe essere precisamente $= \frac{\delta y}{\delta x}$. Tutte cose, che non hanno la menoma difficoltà. Perchè è verissimo che $\frac{0}{0}$ per sè non significa grandezza determinata: ma vie meno significa doversi il rapporto in quel caso riputare indeterminato, mentre al contrario tutti sanno che si può esso altronde determinare. E si determina appunto col riflesso, che serve di principio all'uso degli evanescenti nella ricerca delle flussioni; che il rapporto

di queste è quello, in cui vanno a terminare gl'incrementi, che svaniscono, o ciò, che riviene allo stesso, è il rapporto, in cui gl'incrementi si hanno a concepir nascere. Perchè in ogni altra ricerca, dove si devenga a $\frac{0}{0}$, supponendo che generalmente il numeratore, e il denominatore fossero due coordinate, è chiaro che $\frac{0}{0}$ è il rapporto loro al punto, dove esse cominciando insieme non si distinguono dai nascenti loro primi incrementi, e però se ivi esse non fosser nulla, vi sarebbero anch'esse nel rapporto delle flussioni loro. Ond'è il teorema $\left(\frac{y}{x}=\frac{0}{0}\right)=\frac{\delta y}{\delta x}$, $\left(\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{0}{0}\right)=\frac{\delta^2 y}{\delta^2 x}$, ec. non men necessario alla teoria delle Funzioni derivate, benchè in essa non sia così facile vederne la ragione.

Mi rincresce di dovermi così estendere in dichiarazioni di cose notissime. Però a finirla osserverò che il Calcolo differenziale ha principj, e dirò così, leggi particolari sue proprie, per cui può aver bisogno d'una metafisica non necessaria ai Matematici, che quel calcolo non adottino. Ma il metodo delle flussioni non ha principio alcuno, nè legge, che non sia la stessa in altre parti delle matematiche; onde non può aver bisogno d'altra metafisica, oltre quella, che ogni Matematico dee riconoscere per buona, legittima, evidente. Richiede, è vero, che gli si conceda che due punti possono generare, percorrere due linee con diversa velocità. Ma questo, che in Natura si avvera d'infiniti punti a ogni momento, è un *postulato* men negabile ancora che i primi di Euclide; che da punto a punto si possa una retta condurre, e quindi continuare: dove le sue parole *ἀγαγεῖν*, e *κατὰ τὸ συνεχὲς* includono il flusso del punto. E chiunque voglia considerare come dianzi io da questo postulato sia giunto al teorema di *Taylor*, e come si può la flussione dell'area anche altrimenti con ogni rigore dimostrare senza far uso degli evanescenti (vedi il citato volume dell'Accademia di Torino pag. 495, e 496) scorgerà non esservi luogo neppure a pretesti di trovarvi principj, che ogni Matematico non fosse in necessità di confessare veri ed evidenti avanti al trovato delle flussioni. La qual cosa nè più nè meno scorgendosi nella Teoria delle Funzioni derivate, vanno per questa parte le due teorie del pari: nè

fra esse v'è divario in questo che l'una sia di metafisica pura matematica, l'altra nò. Ugualmente amendue sono mere parti di quella metafisica, la quale ho detto essere la speculazione, che fa strada alla misura d'ogni cosa.

Siccome però si possono pur dire metafisiche diverse, inquanto elle sono speculazioni diverse, domandandosi in che differiscano, alle differenze già osservate aggiungerò che per molto diversa strada esse vanno ugualmente incontaminate dalla metafisica degl'infinitamente piccioli. Perchè la Teoria delle Funzioni derivate non dà apparentemente da principio neppure occasione di pensarvi: il metodo delle flussioni al contrario viene subito a teoremi, dove sotto uno o sotto altro de' suoi varj aspetti s'affaccia quella difficoltà, per cui s'è ricorso agli infinitamente piccoli. La difficoltà vien dalla richiesta di precisione assoluta, quale si è quella del punto matematico. Questa difficoltà, che non si scorge ne' rapporti de' numeri intieri, e comincia a lasciarsi vedere negli incommensurabili, soprattutto si manifesta in quella più sublime geometria, il cui soggetto sono le funzioni trascendenti, le grandezze, che neppure algebraicamente possono assegnarsi con un finito numero di termini. Queste conducono la speculazione a quelle serie, i cui termini vanno minorando all'infinito, e alla considerazione de' limiti, a cui le somme, i valori si appressano senza mai pervenirvi. E per la congiunzione delle due idee elementari, della precisione del punto, e della continuità della linea, da cui seguene la divisibilità all'infinito, si vien necessariamente a qualche difficil passo, come quello, che ci ha trattenuti non poco discorrendo della velocità, e quello, da cui parlando della direzione d'un punto della periferìa ci siamo cavati col dichiarare che l'uso della parola era improprio.

Però questa non è difficoltà, che agl'ingegni non superficiali giovi palliare, dissimulare: conviene affrontarla. Il verbo *essere*, parlandosi di cose immutabili, ha significazione assoluta; ma delle mutabili necessariamente riguarda un tempo. Il presente, allor che dico di alcuna cosa ch'ella è, può pigliarsi con qualche estensione, che abbracci più, o meno del passato e del futuro. Ma se ne può ristringere il concetto quanto si vuole; ed è chiaro che se io vorrò portare l'indicazione del tempo presente a precisione assoluta, ne dovrà la durata

esser nulla; e vieppiù è chiaro che supposto vero che una cosa sia di presente, quando io estendo il presente a un minuto secondo, non sarà men vero ch'ella è, quando io porti la precisione del mio intendimento a un punto di quel minuto secondo, concependo quel punto senza durata.

In geometria non v'è bisogno di considerazione di tempo, ma sempre che vi si considerino grandezze variabili, i punti, a cui si riferiscono i valori loro, vi tengono luogo degl' istanti nel tempo; come più manifestamente si vede nel supposto che si generi l'ascissa con flussione costante.

Dove a convincersi che la difficoltà unicamente proviene dalla richiesta di una precisione assoluta basta riflettere che rinunziando a questa, svanisce la difficoltà. Se ci contentiamo d'approssimazione maggior d'ogni bisogno, ci basta far crescer l'ascissa con un seguito d'incrementi uguali di tal picciolezza, che non sia da tenerne conto in paragone, supponiamo, del parametro della curva, e d'altre grandezze non troppo minori, e che si possa francamente considerare l'incrementuccio corrispondente della curva come rettilineo, con tutti gli altri supposti del calcolo differenziale Leibniziano, le cui differenze infinitamente picciole, se così riduconsi, con abuso di quel nome, a significare una picciolezza soltanto comparativa, non se ne può riprendere il calcolo, se non perchè dà aspetto d'approssimazione a ciò, che il geometra vuole, e può accertare precisamente. Perchè cotali infinitamente piccoli non sono grandezze, che non si possano a piacimento determinare, per esempio se io pongo che a sia dieci metri, e dico di non voler portar la precisione tant'oltre che colle grandezze fra a^{20} ed a^{-20} s'abbiano a porre in conto quelle, che stieno fra a^{-80}, ed a^{-120}; e che però sarà a^{-100} il decametro del primo ordine de'miei infinitamente piccioli, a^{-200} quel del secondo, ec. ed a^{100} il decametro del primo ordine degli infinitamente grandi, a^{200} quello del secondo, ec.

Ma niuno, che abbia spirito veramente geometrico, vorrà mai stare a precisione limitata. E perciò gli è d'uopo non isfuggire, ma vincere la difficoltà, riflettendo ch'ella è solo per la fantasia, la quale, dirò così, vuol farsi la figura di ogni cosa. E nelle figure non si possono distinguere insieme grandezze troppo diverse. Sulla carta, in cui stieno tracciate le orbite de'pianeti, non si può vedere il lungo telescopio di

Galileo, che stia osservando i satelliti di Giove. E pur la fantasia vorrebbe ogni cosa distinguere in una sua carta universale, la cui scala è proporzionata alle grandezze, che facilmente si misurano co' sensi nostri. Quindi la perduta sua pena a volersi rappresentare la distanza ora dal Sole a Sirio, ora de' centri di due contigue molecule del sangue, che scorre per le vene d'una pulce. Ma in tutto ciò l'intelletto non incontra la menoma difficoltà. Per aver punti precisi valendosi de' centri di gravità, i centri di gravità delle due molecule sono due punti diversi, e pertanto discosti e determinanti la lunghezza d'una linea retta nè più, nè meno che i due centri di gravità del Sole e di Sirio. Sono adunque le due distanze ugualmente grandezze lineari, finite da due punti, come tutte le altre. L'intelletto nelle parole *ogni*, *qualunque* vede incluse colla stessa facilità tutte le grandezze misurabili con qualunque scala; onde non gli giova il ricorso a diversi ordini di grandezze impropriamente definite *infinitamente picciole, finite, e infinitamente grandi*, il quale dà qualche soddisfazione alla fantasia mostrandole come, se essa non può tali grandezze distinguere tutte nella sua carta universale, ella può rappresentarsele distintamente in altre diverse carte particolari, ciascuna colla sua scala. Ma l'intelletto in questa distinzione vede soltanto implicita una contradizione che una stessa grandezza sia determinata e non terminata, e peggio ancora se si vuole che sia nulla, e nol sia.

Venendo pertanto al caso del rapporto delle mutabilità dell'area e dell'ascissa, dal quale ho cominciato, l'intelletto vede subito che gl'incrementi, o differenze sono le mutazioni fra due punti, non una mutabilità riferibile a un punto preciso, e che una differenza non appartiene piuttosto al termine, a cui debbasi aggiungere, che a quello, da cui si abbia a sottrarre, e che perciò nel caso della *Fig.ª* 3.ª il rapporto delle mutazioni ci darà il rapporto delle mutabilità al punto medio preciso, ma non così nel caso della *Fig.ª* 4.ª nel quale vedrà che più P*p* sarà piccolo, meno M*m* scosterassi da una linea retta. Ed eccolo alla difficoltà, che mentre la fantasia ravvicinando di più in più PM a *pm*, molto prima ch'ella pervenga a far di esse rette una sola, cesserà di distinguere fra i vicinissimi punti M, *m*, l'arcuccio dalla corda, l'intelletto al contrario vede il caso de' punti più vicini e quello de'

più lontani indifferentemente nella proposizione generale, che qualunque retta abbia due punti comuni colla periferia, la taglia, e non ha con essa comune alcun altro punto.

Però volendo la precisione al punto, fra le varie speculazioni per conseguirla nel caso, doveva la medesima fantasia col moto de' punti, ch'ella andava approssimando, condurre i pensieri a quella di *Neuton* dedutta dalle idee del moto, e della velocità, la quale è quella grandezza di movimento, che concependosi la medesima in ugual moto uniforme, che duri un secolo, o solo un minuto secondo, rimane la medesima quando si assegni a un punto di tempo senza durata.

Or l'idea della velocità non lascia dubbio; ma abbiam veduto ch'ella affronta, non iscansa la difficoltà, che prova la fantasia a recarsi alla precisione del punto; onde può lasciar la brama d'una speculazione, che non incontri questa difficoltà. Che però grande certamente sarebbe la superiorità della metafisica del Calcolo delle Funzioni derivate per questo vantaggio, se altrimenti l'ottenesse, che col non mostrarsi ella stessa. Ella vi si rinchiude in un maneggio d'algebra, che non lascia dubbio sulla verità delle formole, a cui perviene, ma non pone in vista lo scopo, l'oggetto, il vero soggetto di tutti que' calcoli; onde chi non ne avesse altronde notizia, non vi vedrebbe che un'osservazione sui coefficienti di certe serie, una dimostrazione del rapporto fra i medesimi; che sviluppando in certo modo una funzione primitiva in série, quindi il suo primo coefficiente in altra simil serie, e il primo coefficiente di questa seconda similmente in una terza, il primo coefficiente della terza in una quarta, e così proseguendo, quanto si vuole, notando p, q, r, s, ec. i coefficienti della prima serie, il primo coefficiente della seconda sarà $2q$, quello della terza $6r$, quello della quarta $24s$, ec.

Vero è che il Geometra altronde istruito subito scorge nella sostituzione di $x+i$ a x la solita sostituzione di $x+x$, o di $x+\Delta x$, la quale è il mezzo più generale per ottenere una espressione degl'incrementi o differenze in più termini, alcuni de' quali annullati, gli resta l'espressione della mutabilità, ch'egli chiama o flussione, o differenziale. Vede che in $f(x+i)=fx+pi+qi^2+ri^3+$ ec. i termini moltiplicati per le potenze di i si hanno a far nulli, e $f(x+i)-fx=pi$

dà il rapporto delle mutabilità $\frac{pi}{i} = p$; e vede anche nella sostituzione di $x + o$ a x fatta per mezzo di $p + op'$, $q + oq'$, $r + or'$, primi termini di serie simili a $p + ip'$, $q + iq'$, ec. con quale artifizio il Sig. *Lagrange* sia pervenuto a un equivalente del teorema di *Taylor*. Ma vi vede altresì implicita nella teoria delle serie all'infinito la difficoltà, che arresta la fantasia nel recarsi alla precisione del punto. E proseguendo la lettura del libro, mentre del continuo egli vi ammira la profondità del Geometra, che l'ha scritto, vi rivede in diversi luoghi trasparire la medesima difficoltà, la quale siccome intrinseca e inseparabile dalle ricerche di questi calcoli, a me pare che s'abbia a volere scoperta piuttosto che velata.

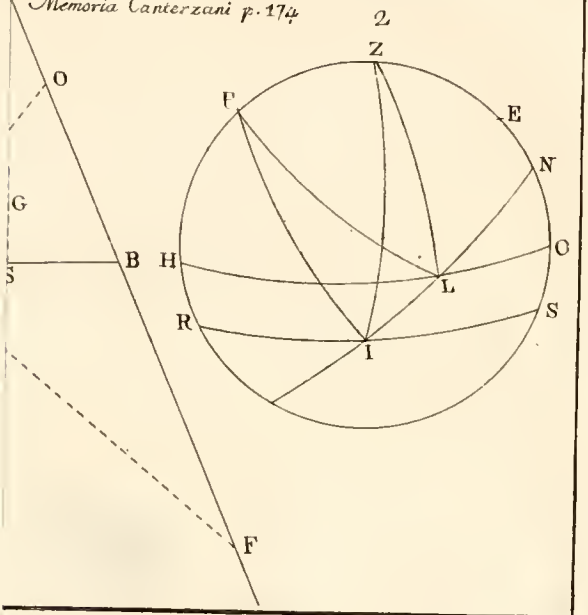
Resterebbeci a vedere se il calcolo delle funzioni derivate *possa ridursi alla semplicità degli altri metodi, massimamente del Leibniziano, tanto nelle applicazioni puramente analitiche, quanto nelle geometriche*. Il Sig. *Lagrange* non ha dimenticate queste applicazioni, benchè le *Lezioni* non s'estendano alla Meccanica, a cui egli aveva applicata la sua *Teoria delle Funzioni* dalla pag. 223 all'ultima 277; sicchè o nell'uno de' citati libri, o in tutti e due egli ha tutte le precipue applicazioni, trattate con quella maestria, che lo distingue, e che pochissimi possono presumere di pareggiare. Vi brama dunque l'Accademia soltanto, se è possibile, maggiore *semplicità*, credo quella spedita facilità, che si trova per esempio nella *Analyse des Infiniment-petits* del Marchese *De l'Hôpital*. Le teorie, che dall'universale ed astratto scendono al particolare e concreto, quanto più sono estese, profonde, e divisate accuratamente senza lasciarvi eccezione dimenticata, tanto debbono riuscire meno facili a chi comincia, e richiedono a bel principio calcoli, e formole meno brevi. Nè però voglio asserire che non si possano i principianti condurre per più facile strada all'intelligenza e alle applicazioni della teoria delle funzioni derivate. Ma quanto e come ciò si possa, è ricerca non solo troppo ardua per le forze mie, ma solo convenevole a chi ne preferisca il calcolo ad ogni altro metodo. A me più si conviene bramare quello, che certamente è possibile, che qualche valentuomo dia un trattato elementare delle flussioni adattato, e corrispondente a quel grado di perfezione, a cui ora è giunta l'Analisi, ed esteso ai

principj de' nuovi calcoli, di cui pure ho detto qualche cosa nel più volte citato volume dell' Accademia di Torino per l'anno 1786, dove avendo studiato di non lasciare sulle Flussioni la menoma difficoltà non ischiarita, vi rimando chi ne incontrasse in questo scritto.

Soc. Ital T. XIV. p. 224

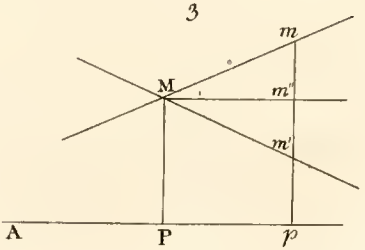
Memoria Canterzani p. 174

2



Memoria Valperga Caluso p. 224

3



4

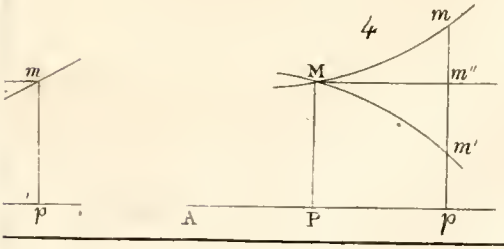
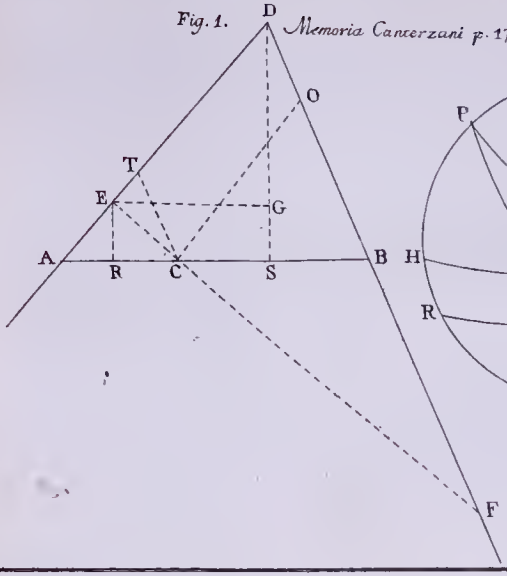
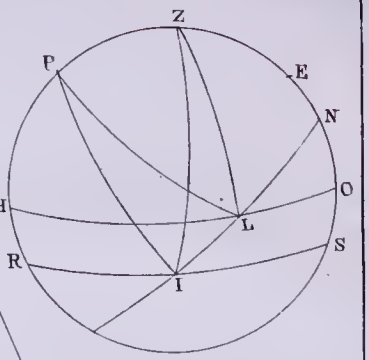


Fig. 1. Memoria Canterzani p. 174

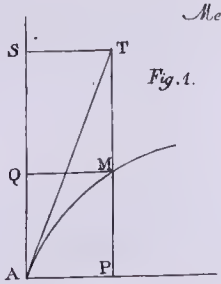


2

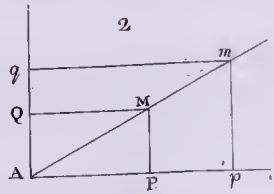


Memoria Valperga Caluso p. 224

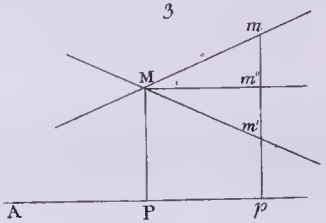
Fig. 1.



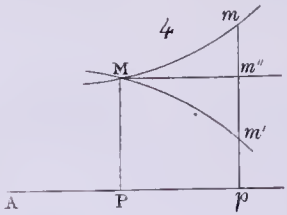
2



3



4



SULLE OSCILLAZIONI DI UN CORPO PENDENTE DA UN FILO ESTENDIBILE.

M E M O R I A

Del Sig. Pietro Paoli.

Ricevuta li 6 *Febbrajo* 1809.

Il problema, in cui si cercano le oscillazioni di un corpo attaccato ad un punto fisso col mezzo di un filo soggetto a distendersi e scorciarsi, è affatto simile all'altro problema già da lungo tempo trattato dai Geometri, nel quale si ricerca il moto di un corpo attratto verso due punti fissi, e non ammette perciò una soluzione rigorosa. Ma se le oscillazioni si fanno per piccoli archi, ed il filo è poco estendibile, queste condizioni somministrano il mezzo d'integrare per approssimazione l'equazioni differenziali, che determinano il moto del pendolo. Il celebre Sig. *Poisson* in una Memoria di recente pubblicata nel decimoquarto volumetto del Giornale della Scuola Politecnica ha risoluto per la prima volta il problema sotto questo aspetto, ed ha trovato che le oscillazioni di un pendolo estendibile seguono le medesime leggi, che quelle di un pendolo di lunghezza invariabile, e solo l'estendibilità del filo introduce una leggiera correzione nella durata delle oscillazioni, e nella lunghezza del pendolo, il quale compie le sue oscillazioni nell'unità di tempo. Ma siccome nell'analisi del Sig. *Poisson* è incorso qualch'errore, il quale potrebbe rendere incerti i resultati ottenuti da Lui, ho stimato bene di rinnuovare una tale ricerca, sembrandomi interessante che si conosca con accuratezza, quale influenza può avere l'estendibilità del filo sulla durata delle vibrazioni.

Sia r la lunghezza variabile del filo, o sia la distanza del centro di oscillazione dal punto di sospensione, θ l'angolo formato dal filo e dalla verticale, t il tempo scorso dal principio del moto, x ed y le coordinate ortogonali del centro di oscillazione, prese dal punto di sospensione, la prima verticale, la seconda orizzontale, in modo che sia $x = r \cos. \theta$, $y = r \operatorname{sen}. \theta$,

g la gravità, e ponghiamo eguale all'unità la massa del pendolo concentrata nel centro di oscillazione. Seguitando il Sig. *Poisson* facciamo l'elasticità del filo eguale ad una funzione di r, che chiameremo $F.r$, e riguardiamola come una forza applicata al centro di oscillazione. Ciò posto, secondo i principj della incomparabile Meccanica analitica avremo l'equazione

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - g + \frac{x}{r} F.r\right)\delta x + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{y}{r} F.r\right)\delta y = 0 .$$

Ora $\delta x = \delta r \cos.\theta - r\delta\theta \operatorname{sen}.\theta$, $\delta y = \delta r \operatorname{sen}.\theta + r\delta\theta \cos.\theta$; sostituendo questi valori, e ponendo separatamente $= 0$ i coefficienti delle variazioni δr e $\delta\theta$, perchè tra loro indipendenti, otterremo per la determinazione del moto del centro di oscillazione le due equazioni

$$\cos.\theta \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \operatorname{sen}.\theta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - g \cos.\theta + F.r = 0$$

$$\cos.\theta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \operatorname{sen}.\theta \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + g \operatorname{sen}.\theta = 0 .$$

Sostituendovi in luogo di x ed y i loro valori in r e θ esse si cangeranno nelle seguenti

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - r\frac{\partial\theta^2}{\partial t^2} - g \cos.\theta + F.r = 0$$

$$2\frac{\partial r}{\partial t} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial t} + r\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + g \operatorname{sen}.\theta = 0 .$$

La seconda di quest'equazioni è simile a quella del Sig. *Poisson*, ma la prima è assai diversa, essendo stato tralasciato da lui il termine $-r\frac{\partial\theta^2}{\partial t^2}$, il quale è dovuto alla forza centrifuga. Fa tanto maggior sorpresa una tale omissione, in quanto che il Sig. *Poisson* ha egli pure osservato, che il problema è analogo a quello di un corpo attratto verso due centri, nell'equazioni del quale ha luogo certamente il termine $-r\frac{\partial\theta^2}{\partial t^2}$.

Per determinare la forma della funzione $F.r$ noi dietro alle traccie del Sig. *Poisson* osserveremo, che siccome r varia pochissimo in tutto il tempo del moto, se chiamiamo a il suo valore all'origine, e generalmente facciamo $r = a - u$, u sarà una piccolissima quantità, di cui potremo trascurare le potenze superiori alla prima. Sarà dunque $F.r = F.a - \frac{\partial F.a}{\partial a} u$, essendo $F.a$ e $\frac{\partial F.a}{\partial a}$ due costanti da determinarsi coll'esperienza. Per

trovarne il valore sia b la lunghezza del filo, prima che abbia sofferto alcuno allungamento, ed ϖ quello che acquista quando vi si attacca il peso del pendolo, in modo che sia $b + \varpi = a$. Dovrà dunque essere $F.a - \frac{\partial F.a}{\partial a} u = o$ quando $u = \varpi$, e $F.a - \frac{\partial F.a}{\partial a} u =$ alla gravità g, quando $u = o$, e perciò $F.a = g$, $\frac{\partial F.a}{\partial a} = \frac{g}{\varpi}$, e $F.r = g - \frac{g}{a} u$. Posti in luogo di r e di $F.r$ questi valori l'equazioni trovate diventeranno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{g}{\varpi} u + (a - u) \frac{\partial \theta^2}{\partial t^2} - g (1 - \cos.\theta) = o \qquad (1)$$

$$(a - u) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} + g \operatorname{sen}.\theta = o . \qquad (2)$$

Per integrare quest'equazioni per approssimazione incominciamo dal trascurare nella (2) i termini di due dimensioni per rapporto a θ ed u, ed avremo

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{g}{a} \theta = o,$$

di cui l'integrale completo è

$$\theta = h \operatorname{sen}. t \sqrt{\frac{g}{a}} + h' \cos. t \sqrt{\frac{g}{a}} .$$

Supponendo che all'origine del moto il pendolo fosse fermo nella situazione verticale avremo $\theta = o$ quando $t = o$, e quindi $h' = o$, e

$$\theta = h \operatorname{sen}. t \sqrt{\frac{g}{a}} .$$

Di qui si ricava $\frac{\partial \theta}{\partial t} = h \sqrt{\frac{g}{a}}$ allorchè $t = o$, e questa ponghiamo essere la velocità iniziale, che è stata comunicata al centro di oscillazione nell'atto di rimuovere il pendolo dalla posizione verticale.

Sostituiamo il valore trovato di θ nella equazione (1), e conservando solamente i termini di due dimensioni per rapporto a θ ed u avremo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{g}{\varpi} u - \frac{h^2 g}{2} \operatorname{sen}.^2 t \sqrt{\frac{g}{a}} + h^2 g \cos.^2 t \sqrt{\frac{g}{a}} = o,$$

o sia ponendo in luogo di $\operatorname{sen}.^2 t \sqrt{\frac{g}{a}}$, e $\cos.^2 t \sqrt{\frac{g}{a}}$ i loro va-

lori $\frac{1-\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}}{2}$, ed $\frac{1+\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}}{2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{g}{\omega}u+\frac{gh^2}{4}\left(1+3\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)=0.$$

L'integrale completo di questa equazione è

$$u=C\,\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{\omega}}+C'\cos.t\sqrt{\frac{g}{\omega}}-\frac{\omega h^2}{4}\left[1+\frac{3}{1-\frac{4\omega}{a}}\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right],$$

ove, siccome ω è una quantità piccolissima e possiamo trascurarne le potenze superiori alla prima, scriveremo 3 in luogo della frazione $\frac{3}{1-\frac{4\omega}{a}}$, che è già moltiplicata per ω. Per determinare le costanti arbitrarie C e C' si osservi che all'origine del moto abbiamo supposto il pendolo essere in quiete, ed il filo perciò giunto al maggiore allungamento $=a$. Pertanto dovrà essere $u=0$, e $\frac{\partial u}{\partial t}=0$, allorchè $t=0$, alle quali condizioni soddisfaremo con porre $C=0$, e $C'=\omega h^2$; sarà dunque

$$u=\omega h^2\left[\cos.t\sqrt{\frac{g}{\omega}}-\tfrac{1}{4}\left(1+3\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)\right]. \quad (3)$$

Adesso è facile il vedere, che continuando l'approssimazione potremo convertire i valori di u e θ in serie ordinate per le potenze di h della forma

$$u=\omega h^2\left[\cos.t\sqrt{\frac{g}{\omega}}-\tfrac{1}{4}\left(1+3\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)\right]+u'h^4+u''h^6+\text{ec.}$$

$$\theta=h\,\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{a}}+\theta'h^3+\theta''h^5+\text{ec.}$$

Ma noi non portando il calcolo al di là della terza potenza di h ci contenteremo del valore precedente di u, e ponendo nella equazione (2) $\theta=h\,\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{a}}+h^3\theta'$ avremo

$$\frac{\partial^2\theta'}{\partial t^2}+\frac{g}{a}\theta'-\frac{g}{6a}\,\text{sen.}^3 t\sqrt{\frac{g}{a}}$$

$$-\frac{g\omega}{4a^2}\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{a}}\left(1+3\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)-\frac{3g\omega}{a^2}\,\text{sen.}\,2t\sqrt{\frac{g}{a}}\,.\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}}$$

$$+\frac{g\omega}{a^2}\,\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{a}}\,.\cos.t\sqrt{\frac{g}{\omega}}+\frac{2g\sqrt{\omega}}{a\sqrt{a}}\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}}\,.\,\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{\omega}}=0,$$

o sia convertendo le potenze ed i prodotti di seni e coseni in

seni e coseni di archi multipli

$$\frac{\partial^2\theta'}{\partial t^2}+\frac{g}{a}\theta'-\frac{g}{8a}\left[\left(1+\frac{11\omega}{a}\right)\operatorname{sen}.t\sqrt{\frac{g}{a}}-\left(\frac{1}{3}-\frac{15\omega}{a}\right)\operatorname{sen}.3t\sqrt{\frac{g}{a}}\right]$$
$$+\frac{g\omega}{2a^2}\left(1+2\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right)\operatorname{sen}.t\left(\sqrt{\frac{g}{\omega}}+\sqrt{\frac{g}{a}}\right)-\frac{g\omega}{2a^2}\left(1-2\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right)\operatorname{sen}.t\left(\sqrt{\frac{g}{\omega}}-\sqrt{\frac{g}{a}}\right)=$$

L'integrale completo di questa equazione è

$$\theta'=C\operatorname{sen}.t\sqrt{\frac{g}{a}}+C'\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}}$$
$$-\frac{1}{16}\left[\left(1+\frac{11\omega}{a}\right)t\sqrt{\frac{g}{a}}.\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{15\omega}{a}\right)\operatorname{sen}.3t\sqrt{\frac{g}{a}}\right]$$
$$+\frac{\omega\sqrt{\omega}}{2\sqrt{a}}\cdot\frac{2\sqrt{a}+\sqrt{\omega}}{2\sqrt{a}+4\sqrt{\omega}}\operatorname{sen}.t\left(\sqrt{\frac{g}{\omega}}+\sqrt{\frac{g}{a}}\right)$$
$$+\frac{\omega\sqrt{\omega}}{2\sqrt{a}}\cdot\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{\omega}}{2\sqrt{a}-4\sqrt{\omega}}\operatorname{sen}.t\left(\sqrt{\frac{g}{\omega}}-\sqrt{\frac{g}{a}}\right),$$

ove possiamo scrivere l'unità in luogo delle frazioni $\frac{2\sqrt{a}+\sqrt{\omega}}{2\sqrt{a}+4\sqrt{\omega}}$, $\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{\omega}}{2\sqrt{a}-4\sqrt{\omega}}$, le quali sono già moltiplicate per $\omega\sqrt{\omega}$.

Sostituendo questo valore in quello di θ avremo

$$\theta=h\operatorname{sen}.t\sqrt{\frac{g}{a}}+h^3C\operatorname{sen}.t\sqrt{\frac{g}{a}}+h^3C'\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}}$$
$$-\frac{h^3}{16}\left[\left(1+\frac{11\omega}{a}\right)t\sqrt{\frac{g}{a}}.\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{15\omega}{a}\right)\operatorname{sen}.3t\sqrt{\frac{g}{a}}\right]$$
$$+\frac{2h^3\omega\sqrt{\omega}}{a\sqrt{a}}\operatorname{sen}.t\sqrt{\frac{g}{\omega}}.\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

ove bisogna ritenere l'ultimo termine, quantunque dell'ordine $h^3\omega\sqrt{\omega}$, perchè il medesimo termine ne dà uno dell'ordine $h^3\omega$ nel valore di $\frac{\partial\theta}{\partial t}$. E siccome all'origine del moto è insieme $t=0$, $\theta=0$, e $\frac{\partial\theta}{\partial t}=h\sqrt{\frac{g}{a}}$, dovrà essere $C=\frac{1}{16}\left(1+\frac{11\omega}{a}\right)-\frac{3}{16.4}\left(\frac{1}{3}-\frac{15\omega}{a}\right)-\frac{2\omega}{a}$, e $C'=0$; sostituiti i quali valori quello di θ diventerà

$$\theta=h\operatorname{sen}.t\sqrt{\frac{g}{a}}+\frac{h^3}{16}\left(1+\frac{11\omega}{a}\right)\left[\operatorname{sen}.t\sqrt{\frac{g}{a}}-t\sqrt{\frac{g}{a}}\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}}\right] \quad (4)$$
$$+\frac{h^3}{16.4}\left(\frac{1}{3}-\frac{15\omega}{a}\right)\left[\operatorname{sen}.3t\sqrt{\frac{g}{a}}-3\operatorname{sen}.t\sqrt{\frac{g}{a}}\right]$$
$$-\frac{2h^3\omega}{a}\operatorname{sen}.t\sqrt{\frac{g}{a}}+\frac{2h^3\omega\sqrt{\omega}}{a\sqrt{a}}\operatorname{sen}.t\sqrt{\frac{g}{\omega}}.\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

A fine di trovare il tempo impiegato dal pendolo per ritornare nella situazione verticale dovremo porre nella equazione precedente $\theta = 0$. Ora tralasciando da principio i termini moltiplicati per h^3 avremo sen. $t\sqrt{\frac{g}{a}} = 0$, cioè $t\sqrt{\frac{g}{a}} = \pi$, essendo 2π la circonferenza del cerchio, che ha l'unità per raggio. Per accostarci di più al vero valore di questo tempo poniamo $t\sqrt{\frac{g}{a}} = \pi + h^2 t'$, e trascurando i termini moltiplicati per potenze superiori ad h^3 troveremo

$$0 = -t' + \frac{1}{16}\left(1 + \frac{11\omega}{a}\right)\pi\sqrt{\frac{g}{a}} - \frac{2\omega\sqrt{\omega}}{a\sqrt{a}}\,\text{sen.}\,\pi\sqrt{\frac{a}{\omega}},$$

e non tenendo conto del termine moltiplicato per $\omega\sqrt{\omega}$ avremo il tempo cercato, che chiameremo T, così espresso

$$T\sqrt{\frac{g}{a}} = \pi\left[1 + \frac{h^2}{16}\left(1 + \frac{11\omega}{a}\right)\sqrt{\frac{g}{a}}\right].$$

Differenziando il valore (4) di θ otterremo

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = h\sqrt{\frac{g}{a}}\,\text{cos.}\,t\sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{h^3}{16}\left(1 + \frac{11\omega}{a}\right)\frac{gt}{a}\,\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{a}} \qquad (5)$$
$$+ \frac{h^3}{16.4}\left(\frac{1}{3} - \frac{15\omega}{a}\right)\sqrt{\frac{g}{a}}\left[3\,\text{cos.}\,3t\sqrt{\frac{g}{a}} - 3\,\text{cos.}\,t\sqrt{\frac{g}{a}}\right]$$
$$- \frac{2h^3\omega}{a}\sqrt{\frac{g}{a}}\,\text{cos.}\,t\sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{2h^3\omega}{a}\sqrt{\frac{g}{a}}\,\text{cos.}\,t\sqrt{\frac{g}{\omega}}\,.\,\text{cos.}\,t\sqrt{\frac{g}{a}}$$
$$- \frac{2h^3\omega\sqrt{\omega}}{a\sqrt{a}}\sqrt{\frac{g}{a}}\,\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{\omega}}\,.\,\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

e sostituendo in questa equazione e nella (3) il valore di T, avremo nel momento, in cui il pendolo si trova di nuovo nella situazione verticale,

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -h\sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{2h^3\omega}{a}\sqrt{\frac{g}{a}}\left(1 - \text{cos.}\,\pi\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right)$$
$$u = -\omega h^2\left(1 - \text{cos.}\,\pi\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\omega h^2\sqrt{\frac{g}{\omega}}\,\text{sen.}\,\pi\sqrt{\frac{a}{\omega}}\,.$$

I valori di u e di $\frac{\partial u}{\partial t}$ sono negativi, e per conseguenza la lunghezza del filo $> a$: e così dev'essere, perchè ad allungare il filo concorre adesso con la gravità anche la forza centrifuga.

Dall'osservare, che il pendolo disceso di nuovo nella situazione verticale, allorchè va a salire dalla parte opposta, è in

circostanze così diverse da quelle, nelle quali trovavasi all'origine del moto, saremo a prima vista tentati a giudicare, che le oscillazioni del pendolo non riesciranno di eguale durata. Eppure se ritorneremo a calcolare i valori di u e θ per questa seconda ascesa e discesa determinandone in modo le costanti arbitrarie, che soddisfacciano ai nuovi valori iniziali di u, $\frac{\partial u}{\partial t}$, e $\frac{\partial \theta}{\partial t}$, troveremo che il tempo impiegato dal pendolo per ritornare dalla seconda stazione verticale alla terza sarà quel medesimo T di prima. Ma anche senza rifare questo calcolo potremo più brevemente assicurarci di ciò nel modo seguente.

Se nella equazione (5) ponghiamo $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$, essa ci darà i diversi tempi impiegati dal pendolo per giungere alla massima altezza tanto da una parte che dall'altra. Tralasciamo per una prima approssimazione i termini moltiplicati per h^3, ed avremo $\cos. t\sqrt{\frac{g}{a}} = 0$, cioè $t\sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{2n+1}{2}\pi$, ove $n = 0, 2, 4$, ec. per gli archi percorsi dalla parte, verso cui è incominciato il moto, ed $n = 1, 3, 5$, ec. per gli archi percorsi dalla parte opposta. Adesso facciamo $t\sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{2n+1}{2}\pi + h^2 t'$, e sostituendo avremo

$$0 = \mp t' \pm \frac{1}{16}\left(1 + \frac{11\omega}{a}\right)\frac{2n+1}{2}\pi\sqrt{\frac{g}{a}} \mp \frac{2\omega\sqrt{\omega}}{a\sqrt{a}}\sqrt{\frac{g}{a}}\,\text{sen.}\frac{2n+1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{\omega}},$$

e tralasciando il termine moltiplicato per $\omega\sqrt{\omega}$ ne dedurremo i tempi richiesti

$$t\sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{2n+1}{2}\pi\left[1 + \frac{h^2}{16}\left(1 + \frac{11\omega}{a}\right)\sqrt{\frac{g}{a}}\right].$$

I valori di θ corrispondenti a questi tempi saranno

$$\pm\theta = h + \frac{h^3}{8}\left(\frac{1}{3} - \frac{3\omega}{a}\right). \qquad (6)$$

Di qui apparisce, che le massime deviazioni del pendolo dalla verticale da una parte e dall'altra si manterranno sempre eguali, e così pure si compiranno in tempi eguali tutte le oscillazioni, e la durata di ciascuna di esse ci verrà data dall'equazione

$$t\sqrt{\frac{g}{a}} = \pi\left[1 + \frac{h^2}{16}\left(1 + \frac{11\omega}{a}\right)\sqrt{\frac{g}{a}}\right]. \qquad (7)$$

Se in questa equazione facciamo $t = 1$, ne dedurremo la lunghezza del pendolo, che fa le sue oscillazioni nell'unità di

tempo, la quale trascurata la quarta potenza di h sarà

$$a = \frac{g}{\pi^2}\left[1 - \frac{h^2\pi}{8}\left(1 + \frac{11\omega}{a}\right)\right]. \qquad (8)$$

Questi resultati però son veri, quando si trascurano le potenze di h superiori alla terza, e quelle di ω superiori alla prima, poichè abbiamo a queste limitata la nostra approssimazione.

Se nelle formole (6), (7), e (8) facciamo $\omega = 0$, esse si ridurranno a quelle, che appartengono al caso del filo non estendibile. Siamo giunti pertanto a quella stessa conclusione, alla quale era stato condotto dalla sua analisi il Sig. *Poisson*; cioè che le piccole oscillazioni di un pendolo estendibile seguono la medesima legge, che quelle di un pendolo non estendibile, e solo l'estendibilità del filo dà luogo ad una leggiera correzione nell'ampiezza delle oscillazioni, nella loro durata, e nella lunghezza del pendolo, il quale fa le sue oscillazioni nell'unità di tempo; e questa correzione diminuisce il coefficiente di h^3 nel valore della prima, ed accresce il coefficiente di h^2 nei valori delle altre senza alterare la forma di questi valori.

L'equazione

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - g\cos.\theta + F.r = 0$$

adottata dal Sig. *Poisson* è quella che usar si dovrebbe, se si volesse determinare la legge, con cui si allunga un filo da un peso attaccato alla sua estremità, ed obbligato a scorrere sopra un piano inclinato alla verticale con l'angolo costante θ. Se facciamo $\theta = 0$, ed $r = a - u$, questa equazione diventerà

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{g}{\omega}u = 0,$$

e ci darà la legge, con cui si allunga un filo verticale fermato con l'estremità superiore ad un punto fisso, quando si attacca un peso all'estremità inferiore. L'integrale completo di questa equazione è

$$u = C\,\text{sen.}\,t\sqrt{\frac{g}{\omega}} + C'\cos.\,t\sqrt{\frac{g}{\omega}},$$

e determinate in modo le costanti, che al principio del moto sia $t = 0$, $u = \omega$, e $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ diventa $u = \omega\cos.\,t\sqrt{\frac{g}{\omega}}$. Quindi l'estremità inferiore del filo continuamente abbassandosi e sollevandosi anderà percorrendo uno spazio $= 2\omega$, e queste divagazioni saranno tutte isocrone, e ciascuna di esse si compirà nel tempo

tempo $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. Tali piccole oscillazioni non potranno arrestarsi, che fermando l'estremità inferiore del filo nel punto che corrisponde ad $u = 0$, cioè ad $r = a$, perchè quivi l'elasticità del filo sarà in equilibrio con la forza di gravità. Se si fermasse in un punto diverso, e poi si lasciasse in libertà, essa continuerebbe a fare nuove oscillazioni meno estese, le quali però si compirebbero nello stesso tempo.

Se ho creduto che la soluzione accennata del Sig. *Poisson* meritasse una qualche correzione, devo però fare il più gran plauso alle altre eccellenti Memorie del medesimo Autore, contenute nello stesso volumetto del Giornale della Scuola Politecnica. Tra queste si trovano alcune ricerche sopra i punti singolari delle curve, dalle quali ho avuto la compiacenza di vedere pienamente confermate le riflessioni da me fatte sullo stesso soggetto, ed inserite nel terzo Tomo de' miei *Elementi d'Algebra* pubblicato sul principio dell'anno 1804.

NOTIZIE ASTRONOMICHE DI GERMANIA

COMUNICATE ALL' ITALIA

Dal Signor Antonio Cagnoli.

Ricevute li 24 *Febbrajo* 1809.

Il celebre nostro Socio straniero Sig. *Olbers* mi ha partecipato i seguenti Elementi della Cometa notabile del 1807 che il Sig. *Bessel* ha ricavati dalle prime osservazioni del Sig. *Thulis* Astronomo di Marsiglia, e da una quantità di eccellenti del Socio emerito Sig. Cav. Ab. *Oriani*.

Passaggio al Periel. 1807, Sett.			18,73709	tempo med. di Parigi.
Inclinazione	63°	10′	10″,9	
Longitudine del Nodo	266	48	9 ,3	dall'Equin. medio.
Longitudine del Perielio	270	53	50 ,9	dall'Equin. medio.
Logarit. della dist. periel.			9,8101466	
Semiasse			130,063	
Eccentricità in parti di esso			0,9950341 5	
Tempo della rivoluzione			1483,3 anni	

Moto diretto.

Questi Elementi sono paragonati con 117 Osservazioni, fatte a Marsiglia, Milano, Lilienthal e Brema dal 22 Settembre 1807 al 28 Febbrajo 1808; che hanno fornito 117 comparazioni nell' ascensione retta, e 110 nella declinazione. Nelle 227 differenze fra i calcoli e le osservazioni, 4 sole eccedono il minuto, 2 stanno tra 50″ e 60″, 3 fra 40″ e 50″, 13 fra 30″ e 40″, 32 tra 20″ e 30″, 53 fra 10″ e 20″, e 120 fra 0″ e 10″. Sembra però che gli Elementi del Sig. *Bessel* godano d'una grandissima esattezza, sicchè anche il tempo della rivoluzione non debba errare di molti secoli.

Lo stesso giovane Astronomo, di zelo e talenti ammirabili (prosiegue il Sig. *Olbers*) occupandosi adesso a formare un Catalogo completo di tutte le stelle osservate da *Bradley*, ha trovato completamente confermato il gran moto proprio

della stella μ di Cassiope, già sospettato dal Socio nostro Sig. *Piazzi* nel supplemento al suo Catalogo. *Bradley* osservò questa stella cinque volte nel Cannocchial meridiano, ed una volta al Murale. Nella Storia celeste di *Lalande* si trova una osservazione del 21 Ottobre 1790. Da queste osservazioni, ridotte al 1800, e paragonate con quella del Sig. *Piazzi*, mi scrive il Sig. *Olbers*, si deducono gli appresso risultamenti. È stato preso il mezzo fra le cinque ascensioni rette di *Bradley*, si è applicata la correzione di 4″ per le stelle fondamentali alla posizione data dal Sig. *Piazzi*, e si è fatta la riduzione al 1800 mediante le formole

$$\text{Precessione in asc. r.} = (\ 52'',45 + 0,0041\ t)\ t$$
$$\text{in declinaz.} = (\ 19,45 - 0,0007\ t)\ t$$

dinotando t il numero degli anni scorsi dopo il 1800; e si è trovato

Tempi dell' Osservazioni.	Ascens. retta ridotta al 1800.	Declinaz. di μ Cassiope ridotta al 1800.	
1750,824		53° 57′ 16″,04	*Bradley*
1754,580 . . .	13° 41′ 33″,94	. . . . .	
1790,802 . . .	13 45 5,88	53 56 15,84	*Lalande*
1797,900		53 56 8,70	*Piazzi*
1800,00 . . .	13 46 1,00	. . . . .	

Gli estremi danno pel moto proprio annuo

in Ascens. retta + 5″,8798
in Declinazione — 1,3973

E in generale la posizione media della stella

Ascens. retta $= 13^{\circ}\ 46'\ 1'',0 + (\ 58'',33 + 0,0041\ t)\ t$
Declinazione $= 53^{\circ}\ 56'\ 5'',8 + (\ 18,053 - 0,0007\ t)\ t$.

Questa formula non differisce dall'osservazione dell'Istoria Celeste Francese, se non che —1″,0 in ascensione retta, e —2″,5 in declinazione. Ella rappresenta altresì le osservazioni di *Ticone* nel 1573 (*Progymnasm.* p. 292), e di *Flamstead* nel 1680 (*Hist. Cœleste Britann.* Vol. I, p. 63, 64) ridotte scrupolosamente dal Sig. *Bessel*. La posizione di questa stella data da *Evelio* è erronea. Sembra certo pertanto che μ di Cassiope abbia il più grande moto proprio fra tutte le stelle. Essendo probabile ch'ella sia delle più vicine al Sole, la sua parallasse potrebbe esser sensibile.

Delle tre Comete, soggiunge il medesimo Sig. *Olbers*, state scoperte nel 1808 dal Sig. *Pons* a Marsiglia, le osservazioni della prima in Marzo, pubblicate nel Monitore, sono probabilmente sfigurate da errori di stampa, per essersi trovato impossibile il rappresentarle con una sezion conica.

Della terza di Luglio ci mancano le osservazioni, ma quelle della seconda, fatte in Giugno a Marsiglia, hanno somministrato al Sig. *Bessel* gli elementi parabolici seguenti.

Passagg. al Periel. 1808, Lugl. 12,17418 tempo med. di Parigi.

Longitudine del Nodo	24° 11′ 14″ 5
Longitudine del Perielio	252 38 50
Logarit. della distanza perielia	9,783870
Inclinazione	39° 18′ 59″

Moto retrogrado.